

量子论的诞生

马红孺

上海交通大学机械与动力工程学院

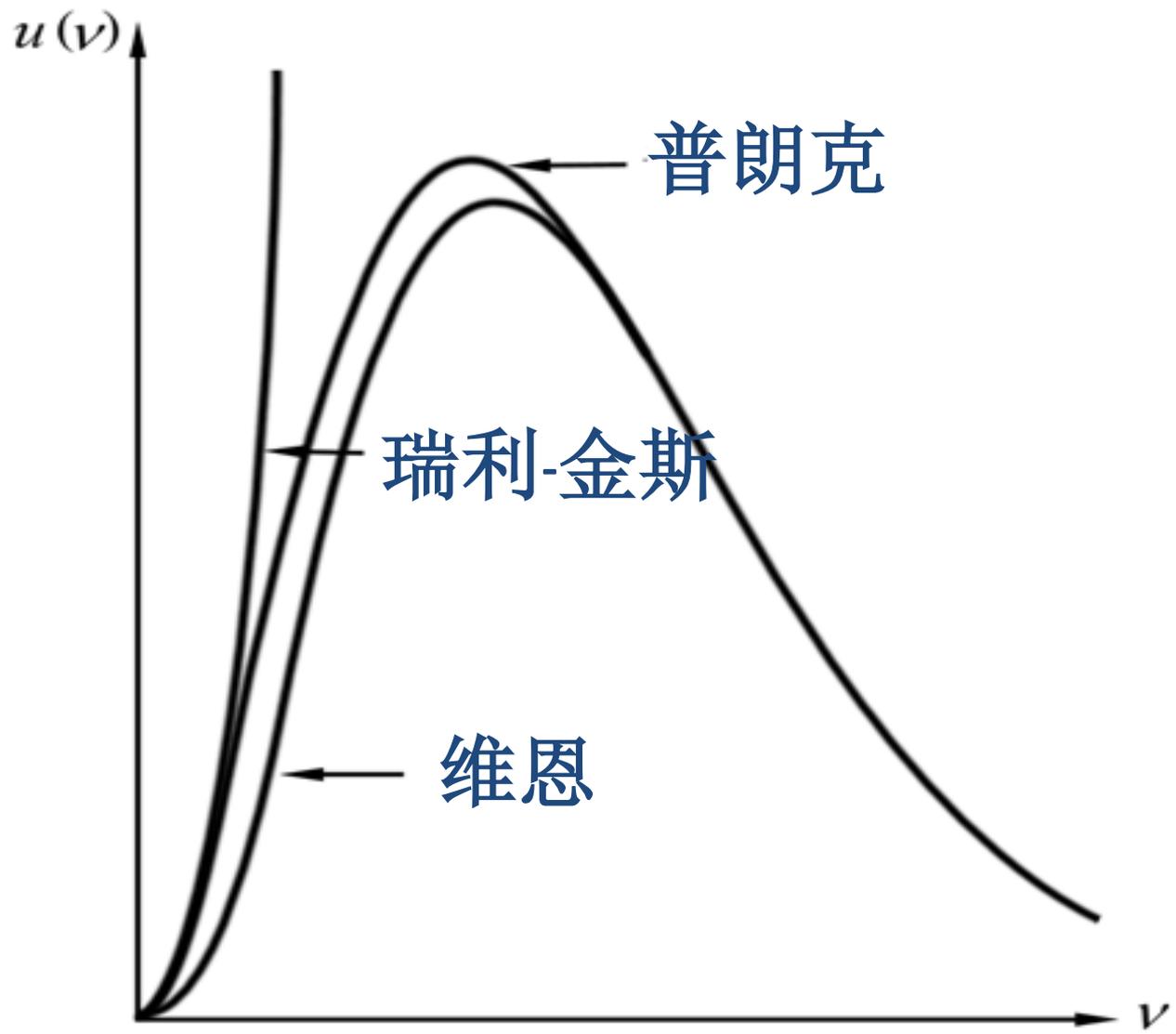
1900年： 黑体辐射

1900年12月14日，普朗克在德国物理学会报告了他的黑体辐射的公式



$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

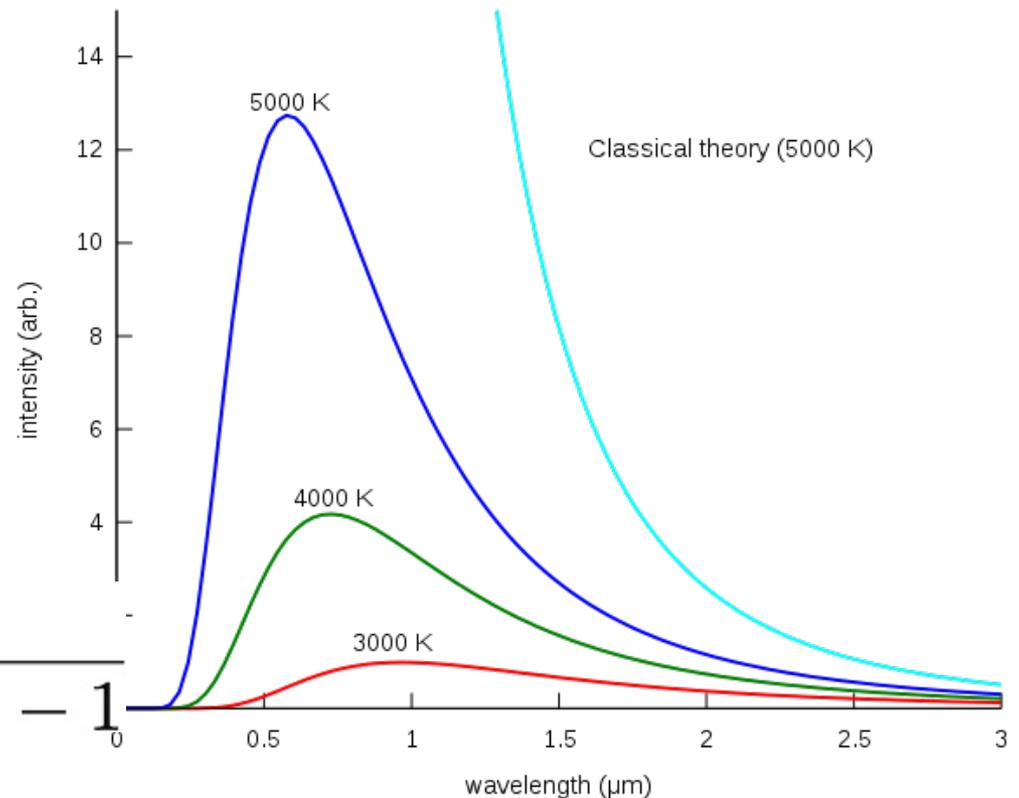
April 23, 1858--October 4, 1947



1900年：黑体辐射

- 这里的h是一个无法解释的常数。
- 宣布了量子理论的诞生

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$



- 维恩

$$u = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} C e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

- 瑞利-琼斯

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} kT$$

Planck 的研究

- 1900年，planck已经为黑体辐射付出了6年
- 这一年，他证明Wein的理论是正确的
- 最新实验确认维恩的结果在低频有明显偏差
- Planck发现了推导时的漏洞，但无法补
- 一个内插公式

Planck 的方法

- 代替难以琢磨的辐射场，研究构成空腔的物质的能量分布
- 如果空腔由一系列振子组成，那么

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U(\nu, T)$$

- Planck研究振子的能量分布

- 设想一个振子与电磁辐射场达到了热平衡，现在给振子一点能量 ΔU ，则振子偏离了平衡。
- 系统趋于平衡，振子能量减少，熵增加。
Planck通过计算，得到整个系统的总熵的变化为

$$\frac{dS_{tot}}{dt} = \frac{3}{5} \frac{d^2 S}{dU^2} \frac{dU}{dt} \Delta U$$

- Planck证明了，对于n个独立的振子

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{\alpha}{U}$$

- 根据定义： $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$

- 于是： $U = C e^{-\frac{1}{\alpha T}}$

$$u = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} C e^{-\frac{1}{\alpha T}}$$

- Wein位移定律

$$u(\nu, T) = \nu^3 \phi\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

- 于是:

$$u = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} C e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

Rayleigh-Jeans 公式

- 根据能量均分原理

$$U \propto T \quad \frac{d}{dU} \left(\frac{1}{T} \right) \propto \frac{1}{U^2}$$

- 从而 $u(\nu, T) \propto \nu^2 T$

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} kT$$

- **漏洞:** 振子之间的相互作用?

- **内插:**
$$f(U) = \frac{\alpha}{U(\beta + U)} = \frac{d}{dU} \left(\frac{1}{T} \right)$$

- **积分上式得到**
$$\frac{1}{T} = \frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{U}{\beta + U} + C'$$

- **结合Wein位移定律和振子能量与辐射场能量之间的关系**

$$u = \frac{C\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

推导

普朗克的推导由下面的几步构成：

1, 设想有 N 个振子, 振子的总能量为 $U_N = P\epsilon$, 总熵 $S_N = NS$, 其中 P 为整数, ϵ 是一个能量单位。振子的平均能量为 U , 熵为 S , 所以 $U_N = NU$, $S_N = NS$ 。

2, 把 P 份能量分配给 N 个振子, 分配的方式数为

$$W = \frac{(N + P - 1)!}{P!(N - 1)!}$$

注意到 $N \gg 1, P \gg 1$, 利用斯特令公式: $N! \approx N^N, \dots$, 得到

$$W = \frac{(N + P)^{N+P}}{N^N P^P}$$

3, 按照波尔茨曼的统计理论, 熵为状态数的对数乘以波尔茨曼常数 k

$$\begin{aligned} S_N &= k \ln W = k [(N + P) \ln(N + P) - N \ln N - P \ln P] \\ &= kN \left[\left(1 + \frac{P}{N}\right) \ln \left(1 + \frac{P}{N}\right) - \frac{P}{N} \ln \frac{P}{N} \right] \end{aligned}$$

代入 $\frac{P}{N} = \frac{U}{\epsilon}$, 得到

$$S = k \left[\left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) - \frac{U}{\epsilon} \ln \frac{U}{\epsilon} \right] \quad (1)$$

4, 由维恩位移定律:

$$u = \nu^3 \phi \left(\frac{\nu}{T} \right)$$

从热力学可以证明:

$$u = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U$$

从而

$$U = \nu g \left(\frac{\nu}{T} \right)$$

反解得

$$T = \nu f \left(\frac{U}{\nu} \right)$$

f 是 $\frac{U}{\nu}$ 的一个函数。

5, 由热力学,

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \quad (1)$$

即

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{\nu} f\left(\frac{U}{\nu}\right)$$

积分得

$$S = f\left(\frac{U}{\nu}\right)$$

这里, 为简单起见, 我们利用 f 表示未知的函数, 在每一行是不一样的。与前方程比较, 可知, 只有当

$$\epsilon = h\nu \quad (2)$$

时, 才能满足要求。这里 h 是一个常量。于是, 假定上面的关系式成立。

6, 在quantum的假定下,

$$S = kN \left[\left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) \ln \left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) - \frac{U}{h\nu} \ln \frac{U}{h\nu} \right] \quad (1)$$

上式对 U 求导并令其等于 $\frac{1}{T}$, 有

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{h\nu} \ln \left(1 + \frac{h\nu}{U} \right)$$

由此解得

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

并最终得到:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (2)$$

在得到这个结果时，quantum假定是非常关键的一步，由此引入的常数 h 是一个普适常数。为了确定这个常数和波尔茨曼常数，普朗克首先计算了总的能量密度 u

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\nu, T) = 1.0823 \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4$$

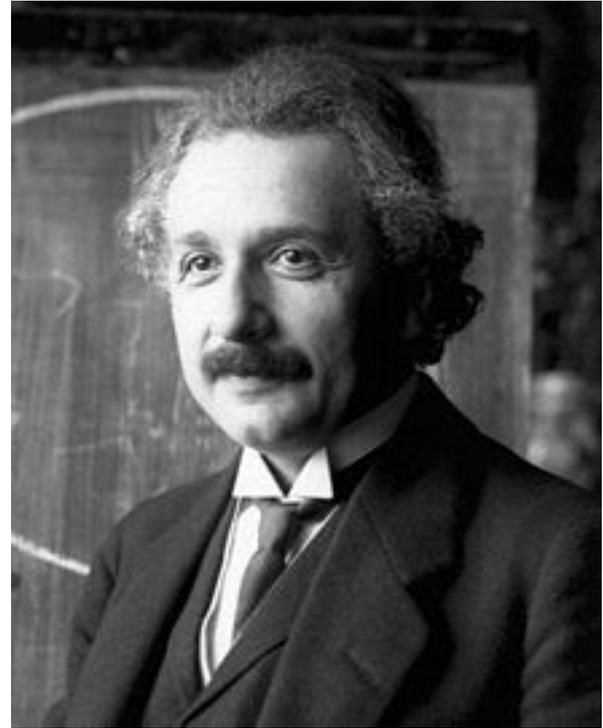
实验测量的结果是： $u(T) = 7.061 \times 10^{-16} T^4 \frac{J}{m^3 K^4}$ ，令上式等于这一结果，得到

$$\frac{k^4}{h^3} = 1.1682 \times 10^8$$

在普朗克的推导中，假定了振子的能量是量子化的，只能取 $U = nh\nu$ 。振子与辐射场之间交换能量时，只能从振子拿走整数个 $h\nu$ 的能量或给予整数个 $h\nu$ 的能量。注意到普朗克利用振子作为与辐射场处于热平衡的物质，辐射场发射和吸收能量也是一份一份的，每一份的大小是 $h\nu$ 。

1905年：光电效应

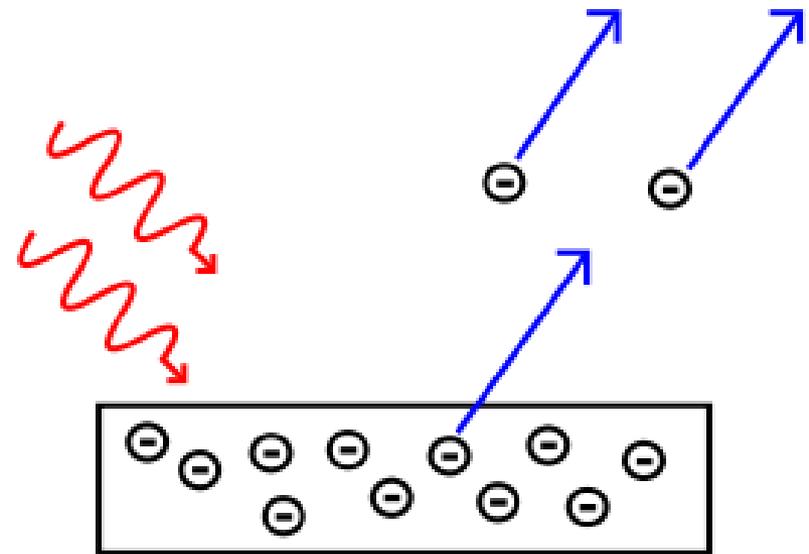
爱因斯坦提出
光量子假说，
解释了光电效
应。



14 March 1879--- 18 April 1955



Philipp Lenard in 1900

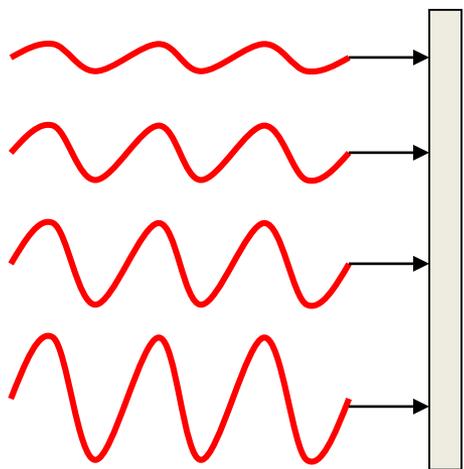


光电效应

经典方法

增加光波的振幅

电子发射？

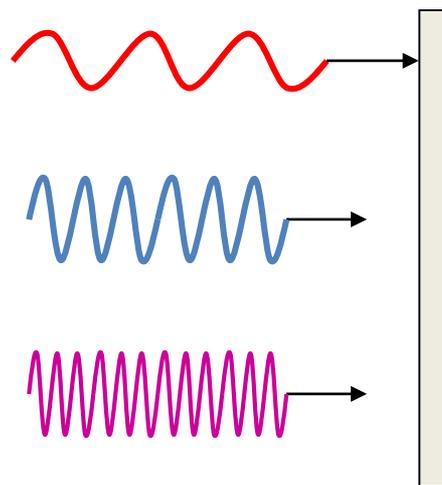


无
无
无
无

如果...，将？

固定振幅，减小波长

电子发射？



无

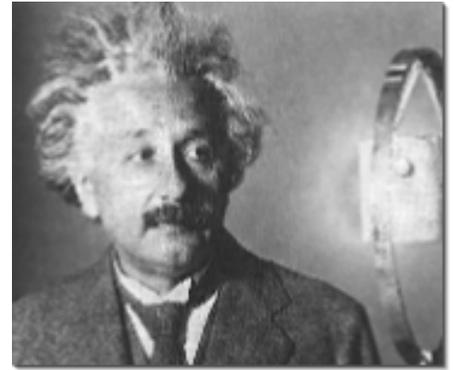
有，低能量

有，高能量

直到波长达到一个临界波长之前，没有电子从表面发射。
小于临界波长，有电子发射！

小 λ \rightarrow 大 ν

光电效应



- 另一种观点：光的行为像粒子
- 光粒子的能量必须足够大，能把电子从原子中打出来.
- 增加光的强度只是增加光粒子的数目, 不是增加每个光子的能量.
- 如果光粒子的能量和光的频率相联系，增加频率就增加了每个光粒子的能量。高频光可以打出电子，低频则不能

光子

□ 在量子理论中，光被认为是某种粒子，称为光子

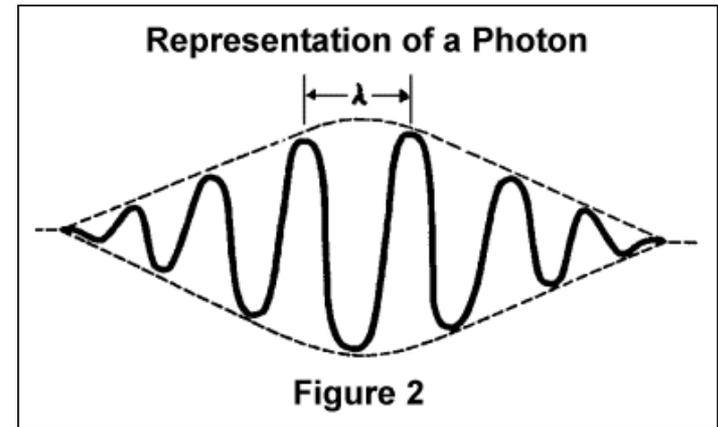
□ 光子具有能量

$$E = h\nu = hc/\lambda$$

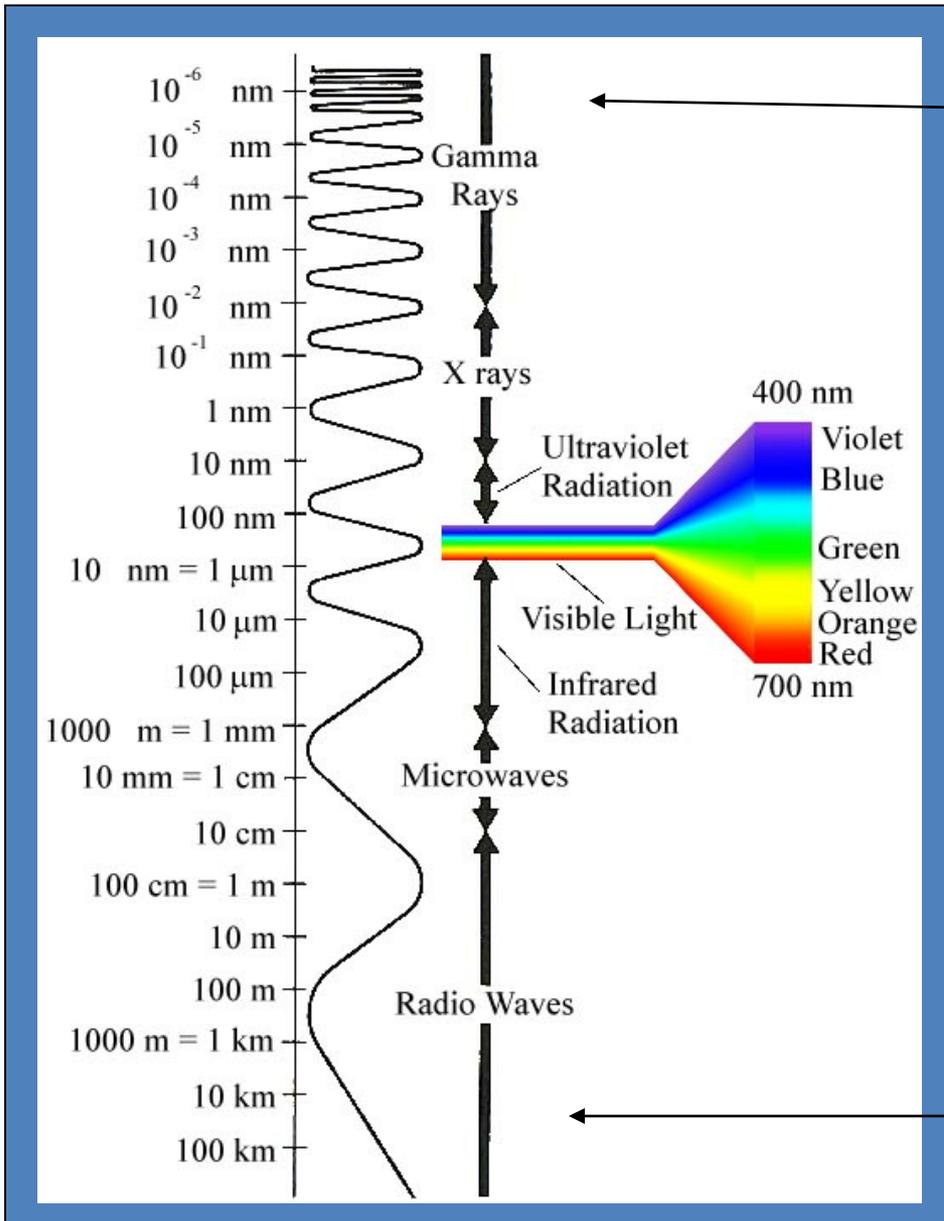
$h = 6.6 \times 10^{-34}$ [J s] 普朗克常数,

□ 光子能量正比于频率（反比于波长）。

□ 量子理论描述光电效应可以达到极高的精度，经典波理论无法解释。



电磁波谱



最短波长，高能光子

$$E = h\nu = hc/\lambda$$

$$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ [J*sec]}$$

(普朗克常量)

最长波长，低能光子

动 量

物理中，动量是和能量同等重要的一个物理量。

质点的动量：

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

动量的单位：[kg] [m/s] =[kg m/s]

能量是标量， 动量是矢量， 沿速度方向。

能量和动量都是守恒量

光子具有动量?

德布罗意认为光子具有动量.

$p = m_0 v$, 光子 $m_0 = 0$, $p = ??$ 根据相对论

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{c}$$

德布罗意认为:

$$p = E / c$$

代入光子能量: $E = hc / \lambda$:

$$p = h / \lambda$$

德布罗意关系



德布罗意关系

$$p = h/\lambda$$

光子具有动量!!!

Louis de Broglie

$$\lambda = h/p$$

$$E = hc/\lambda$$

光子具有能量!!!

能量和动量都和波长成反比

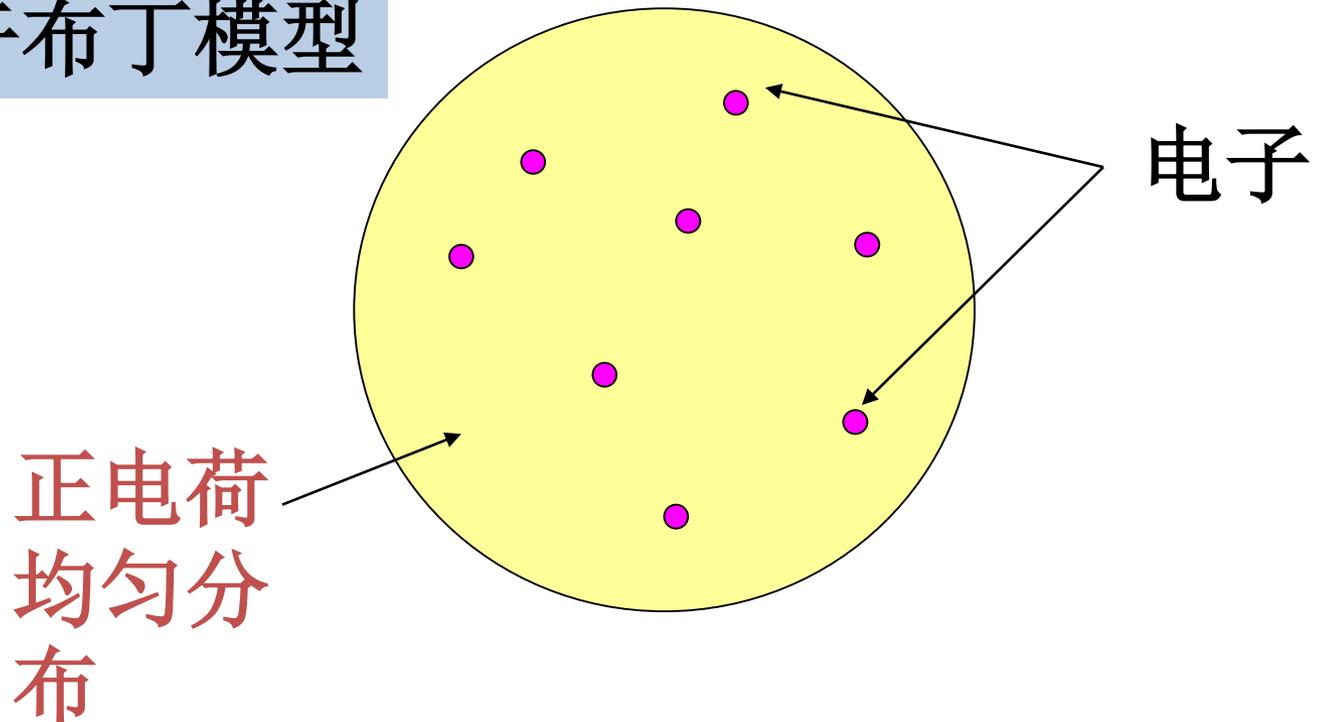
→ 最高能量的光子具有最小的波长

元素的组成

每个元素可以联系于一类原子

1905年以前，没有人知道原子的内部是什么样子

葡萄干布丁模型



- 物理学和哲学的关系？
- 物理常数是如何产生的。
- 量子时代过后是什么时代
- 量子力学在社会中怎么应用
- 不确定原理是否意味着哲学上的不可知论。
- 文艺复兴以前的黑暗时期有没有人对亚里士多德提出质疑。近现代物理怎么产生的
- 为什么学物理要知道物理学家的故事。有什么用？
- 黑洞内部信息可否作为波储存在P膜上？黑洞辐射可否预测黑洞的状态和完整信息？
- 量子力学与相对论是否矛盾

- Pauli不相容原理是什么？
- 氢原子角量子数怎么算出的，磁量子数？
- 宇称如何观测，有什么用？
- 单个光子之间有联系么？什么联系？如何解释单缝衍射
- 波尔和MAXWELL理论的矛盾如何调和。波尔的理论是凑出来的？
- 爱因斯坦对量子力学除了光电效应还有什么贡献
- 开尔文温标有什么优势。绝对零度怎么定
- 不确定关系的下限为什么有多种版本？波函数为什么要满足连续性，导数为什么要连续？

- 夸克是由什么构成的？
- 量子和经典的界限？宏观和微观？介观体系该怎么处理？
- 狭义相对论和广义相对论的适用范围？
- 核能和核武器有多远？有了核电站是否就可以生产核武器。
- 波动性和粒子性可否认为是统一法则在不同观测下的不同表现形式？
- 波尔理论为什么只能解释氢类氢？
- 普朗克是怎么想出来黑体辐射公式的。
- 普朗克曲线在2.7K特别准。其他温度不那么准？是什么导致的。误差来源。
- 量子力学是否能解释自然界的绝大部分现象？

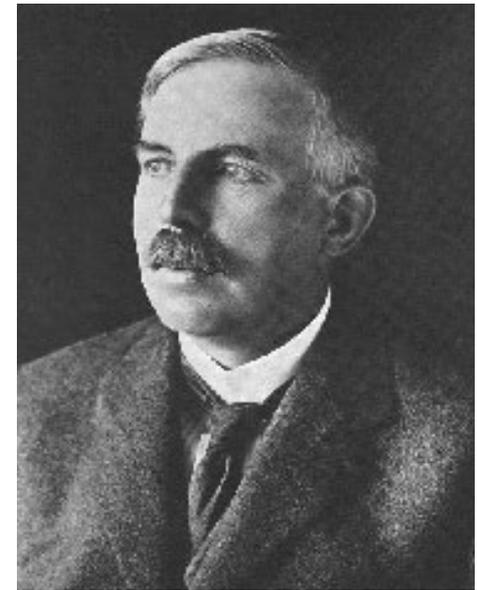
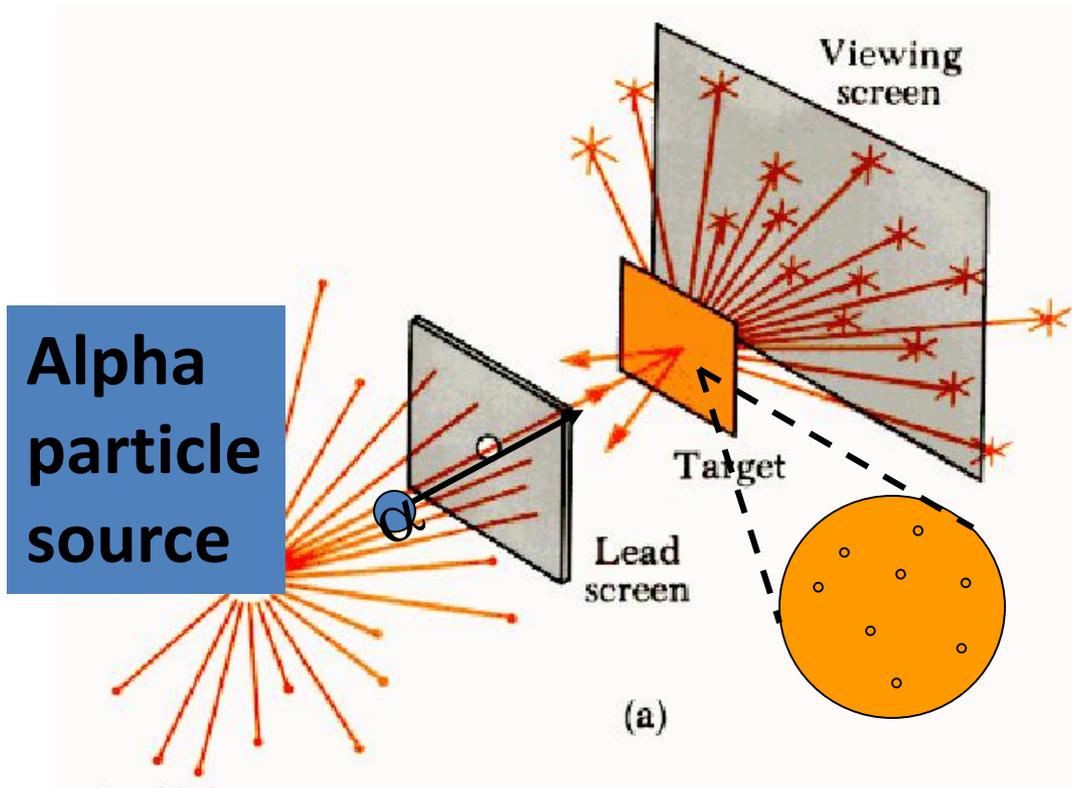
- 量子在计算机科学有什么应用？
- 中国物理学界的折腾是怎么一回事？
- 量子计算机的理论原型是什么？
- 暗能量是什么？
- 同一现象可以有数个理论来解释。怎么判段哪个理论可行？
- 量子力学对于通信有什么用？量子纠错是什么？
- 量子力学发展中克服了哪些瓶颈，如何？
- 量子力学如何影响半导体集成电路。是否有可能超出现在的尺寸瓶颈
- 中微子超过速是否意味着爱因斯坦相对论的破坏
- 量子力学在社会中怎么应用
- 波尔理论的假设有什么根据？现在的理解有什么前进

Planck unit

| Name | Dimension | Expression | Value (SI units) |
|--------------------|--------------------------|--|------------------------------------|
| Planck length | Length (L) | $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ | $1.616199(97) \times 10^{35} m$ |
| Planck mass | Mass (M) | $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ | $2.17651(13) \times 10^8 kg$ |
| Planck time | Time (T) | $t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$ | $5.39106(32) \times 10^{44} s$ |
| Planck charge | Electric charge (Q) | $q_p = \sqrt{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ | $1.875545956(41) \times 10^{18} C$ |
| Planck temperature | Temperature (Θ) | $T_p = \frac{m_p c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}$ | $1.416833(85) \times 10^{32} K$ |

散射实验

如果葡萄干布丁模型正确...



Ernest Rutherford
1871-1937

Awarded the
Nobel Prize in 1908

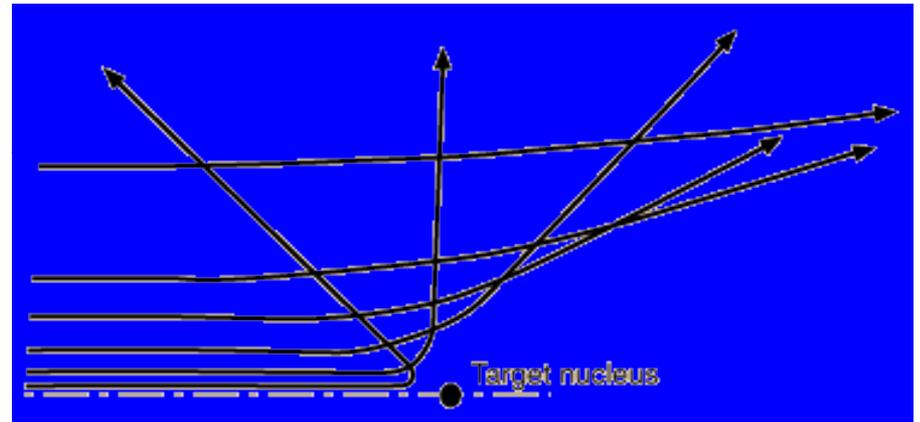
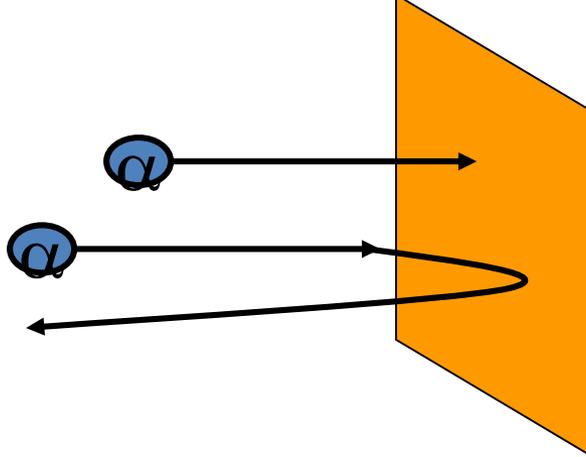
Alpha 粒子只有很少的偏转...

Au 箔散射实验结果

卢瑟福发现大约 $1/8000$ 的alpha粒子被弹回，而布丁模型预言最多 $1/10,000,000,000$???

金箔

囧 ?!?

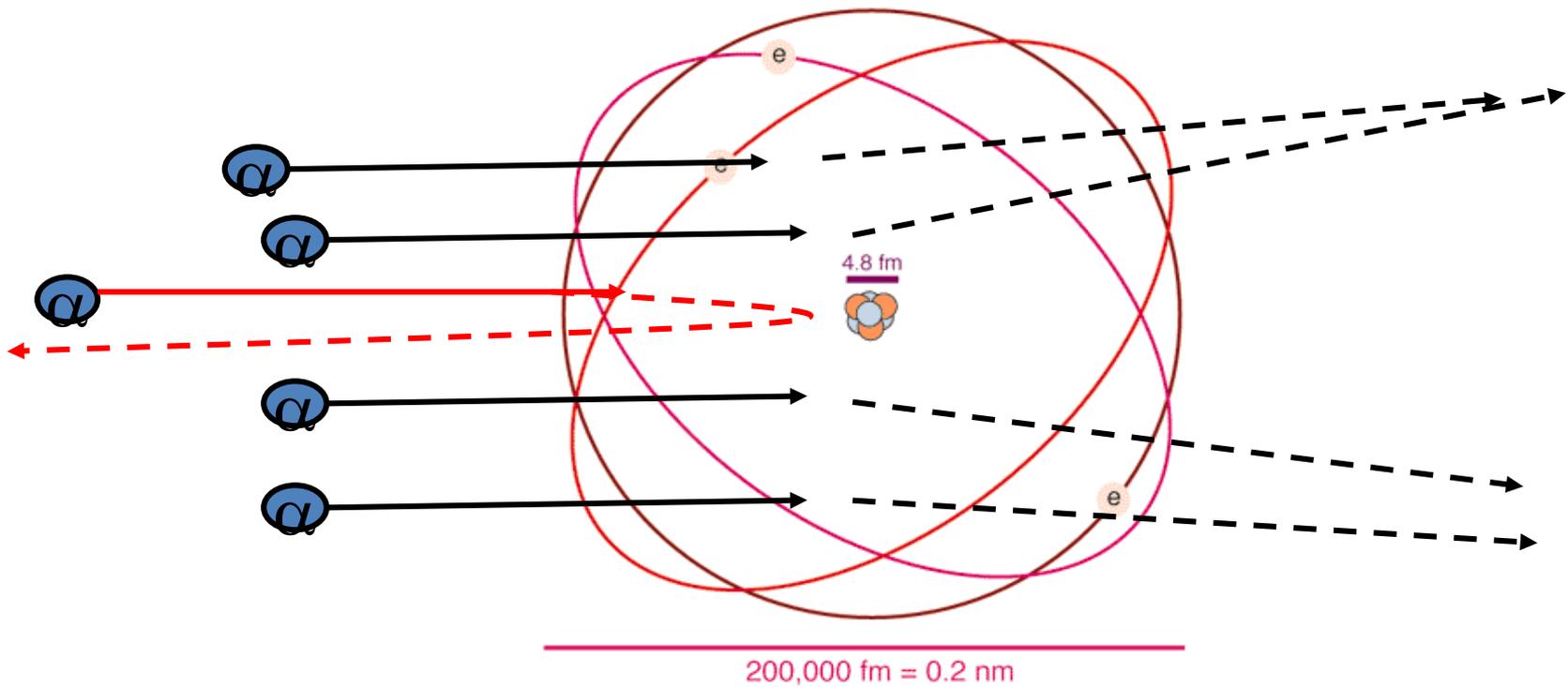


In Rutherford's words...

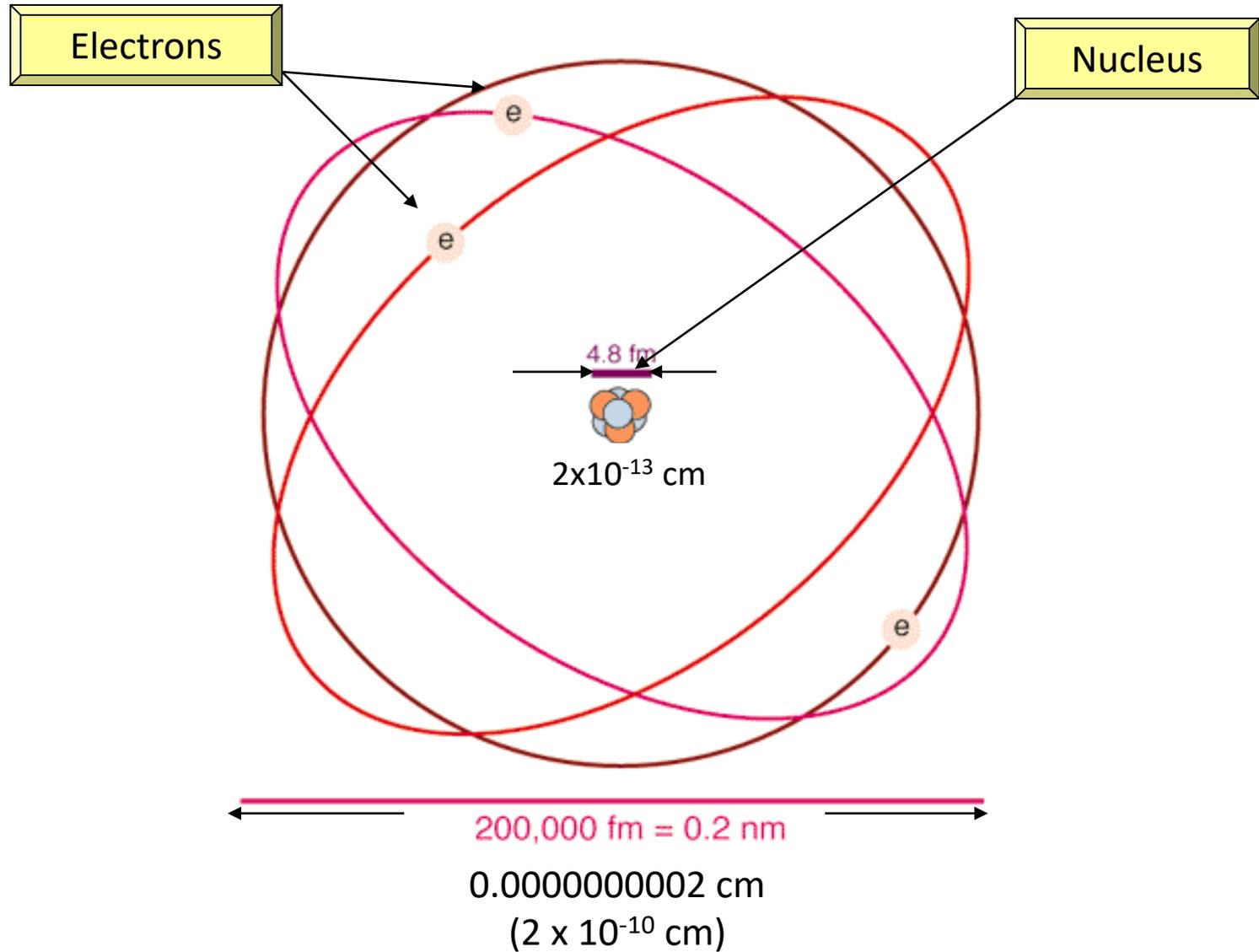
"It was quite the most incredible event that ever happened to me in my life. It was as if you fired a 15-inch naval shell at a piece of tissue paper and the shell came right back and hit you."

1911年：卢瑟福原子

原子一定有一个硬核。



原子有核模型



原子占据的空间

- 原子核的半径 $\sim 2 \times 10^{-13}$ cm.
- 电子轨道半径 $\sim 2 \times 10^{-10}$ cm

$$\text{原子体积} = (4/3) * \pi * (2 \times 10^{-10})^3 = 3.4 \times 10^{-29} \text{ cm}^3$$

$$\text{核的体积} = (4/3) * \pi * (2 \times 10^{-13})^3 = 3.4 \times 10^{-38} \text{ cm}^3$$

$$\text{体积比} = (3.4 \times 10^{-38} / 3.4 \times 10^{-29}) = 0.000000001$$

原子的大部分空间是空的!!!

卢瑟福的原子是不稳定的！

加速带电粒子会辐射能量

两类典型的辐射：

直线加速运动带电粒子的辐射： 韧致辐射

匀速圆周运动带电粒子的辐射： 同步辐射

一般情况下，两种类型的辐射同时存在

卢瑟福的原子是不稳定的！

- 如果电子绕原子核做圆周运动，则由于同步辐射，能量损失，电子的轨道半径变小。
- 计算表明：在 $10^{-9}s$ 的时间内，电子将到达原子核。

1913年：玻尔原子

玻尔假定：只有角动量为普朗克常数 $h = h/2\pi$ 的整数倍的轨道才是允许的轨道；

在轨道之间跃迁发射或吸收光子，频率是能级差除以普朗克常数。



Niels Henrik David Bohr

7 October 1885---

18 November 1962

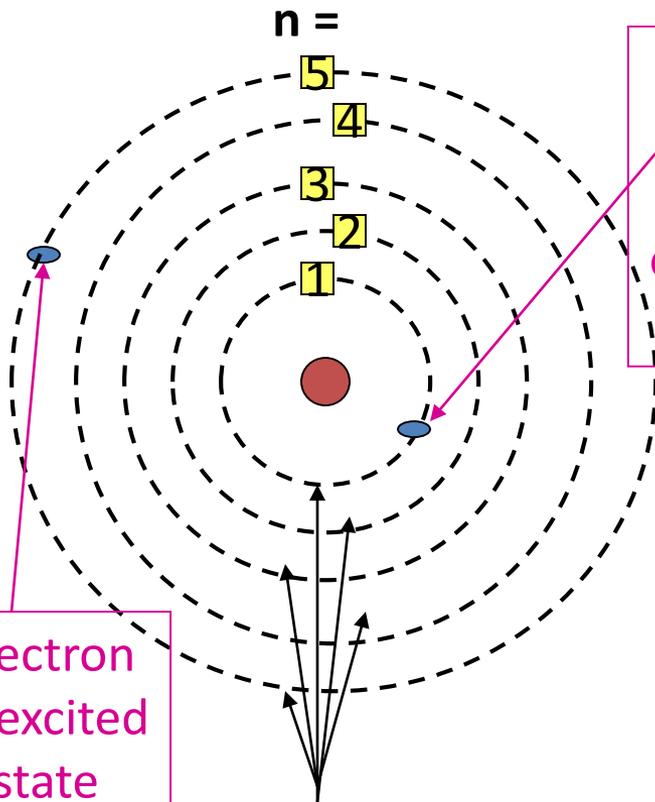
玻尔是卢瑟福的“学生”

玻尔的原子图像

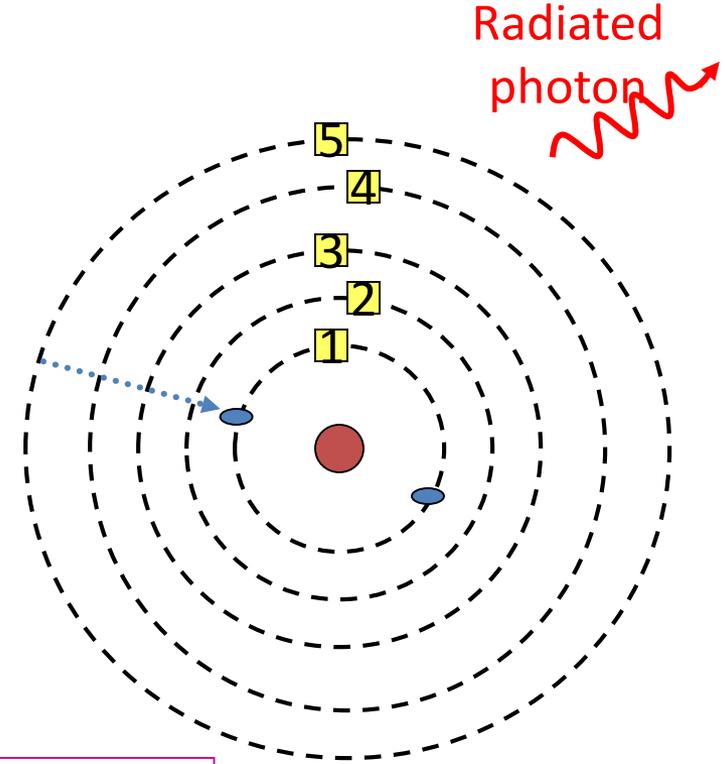
Before

Electrons circle the nucleus due to the Electric force

After



Electron in lowest "allowed" energy level (n=1)



Electron falls to the lowest energy level

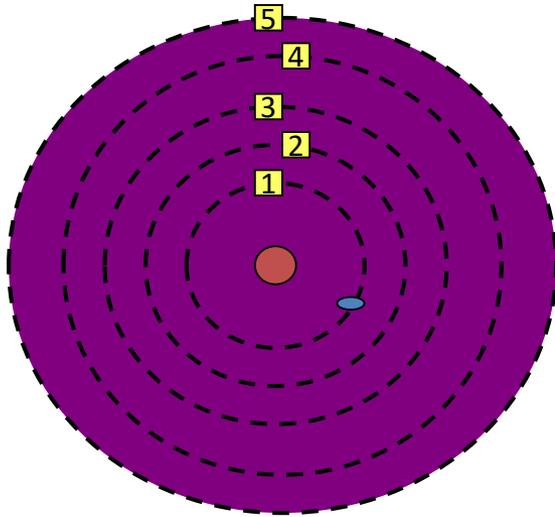
Electron in excited state (n=5)

Allowed Orbits

Radiated photon

氢原子的能级

$$E_n = -13.6 / n^2$$



| Energy Level | Energy E_n (eV) |
|--------------|-------------------|
| 1 | -13.6 |
| 2 | -3.4 |
| 3 | -1.51 |
| 4 | -0.85 |
| 5 | -0.54 |

$$E_{31} = E_3 - E_1 = -1.51 - (-13.6) = \mathbf{12.09 \text{ (eV)}}$$

1913年：玻尔的原子

氢原子的发射线，巴耳末线系（Balmer）

| | | | | | | |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|
| Transition of n | 3→2 | 4→2 | 5→2 | 6→2 | 7→2 | 8→2 |
| Name | H α | H β | H γ | H δ | H ϵ | H ζ |
| Wavelength (nm) | 656.3 | 486.1 | 434.1 | 410.2 | 397.0 | 388.9 |
| Color | Red | Blue-green | Violet | Violet | (Ultraviolet) | (Ultraviolet) |

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R_{\text{H}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{for } n = 3, 4, 5, \dots$$

习题：玻尔的原子模型。考虑氢原子，假定质子静止，电子在质子的作用下绕质子做圆周运动，求出电子的轨道半径与电子速度的关系。

玻尔假定：只有满足角动量（对于圆周运动，等于 mvr ）为普朗克常数除以 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 整数倍的轨道才是允许的轨道，是由此求出氢原子的允许轨道的半径，进而计算电子的允许能量（能级）。

答案：

$$E_n = -\frac{m}{2\hbar^2} \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a_0} \frac{1}{n^2}$$

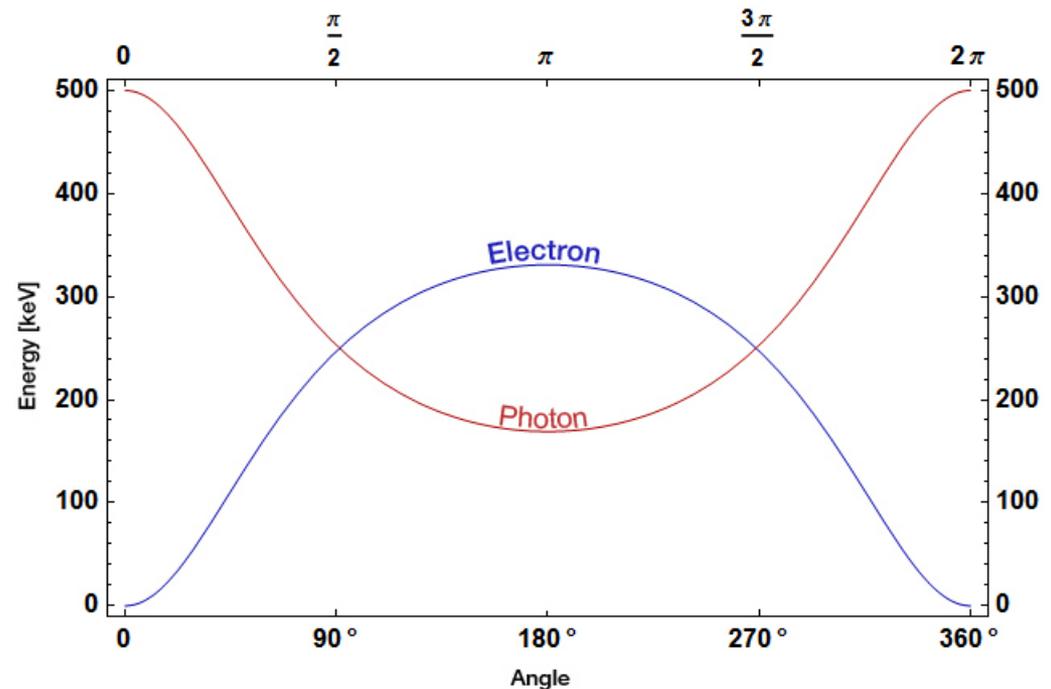
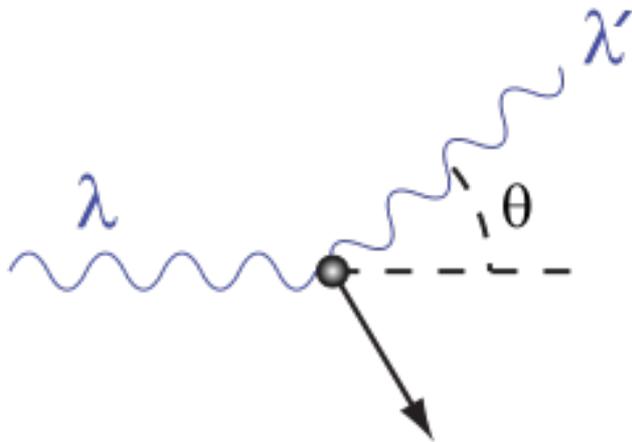
$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}}$$

玻尔原子理论的发展和困难

- 玻尔原子概念的应用在随后的10余年被推向极致，解决了一大类原子物理的问题。
- 玻尔理论的大量应用也大量暴露出理论的不可克服的困难：禁戒跃迁，谱线强度，多电子原子的困难，

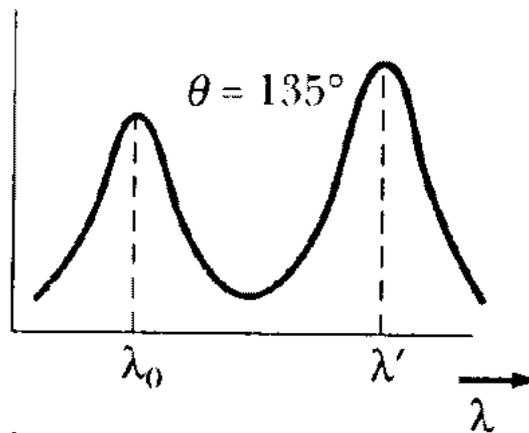
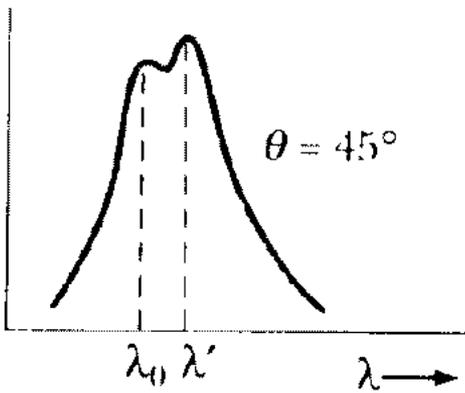
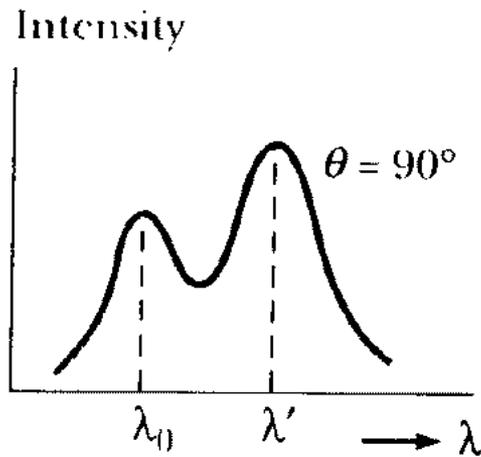
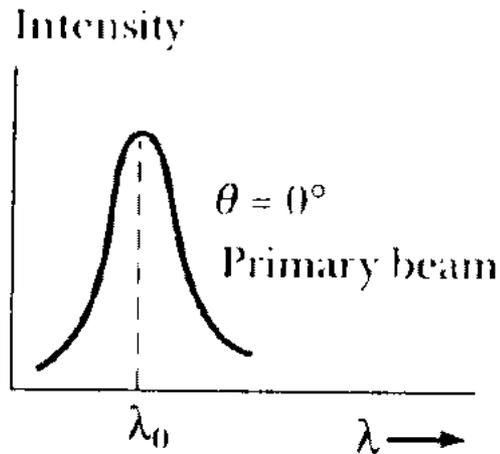
康普顿效应：1923

- 1923年，康普顿发表了一篇论文，利用光量子的概念推导出光子与电子散射后频率的变化及其实实验验证。



实验测量的结果

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$



(b)

量子概念的确证

- 光可以表现出粒子性：

确定性实验：**光电效应，康普顿效应，
黑体辐射**

量子化概念非常成功：

玻尔原子的光谱线位置

困难：和波动图像的调和？ 光谱线的强度

德布罗意波： 1924

- 1924年，德布罗意完成了他的博士论文
“Research on Quantum Theory”
- 论文提出了“波粒二像性”的概念，指出电子和光一样，既可以表现出粒子的行为，也可以表现出波的行为

德布罗意关系

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \vec{p} = \frac{h}{2\pi} \vec{k} = \hbar\vec{k}$$

这些关系对于所有的粒子都适用

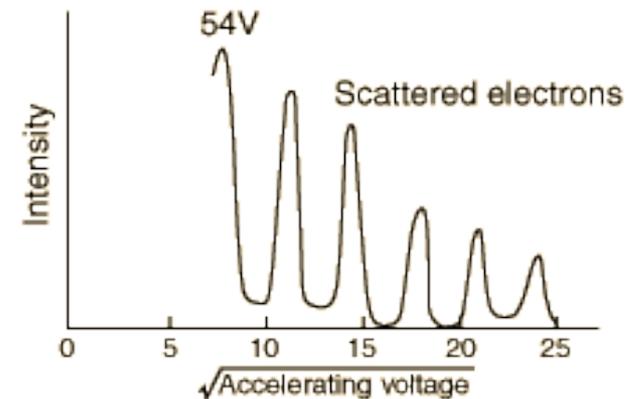
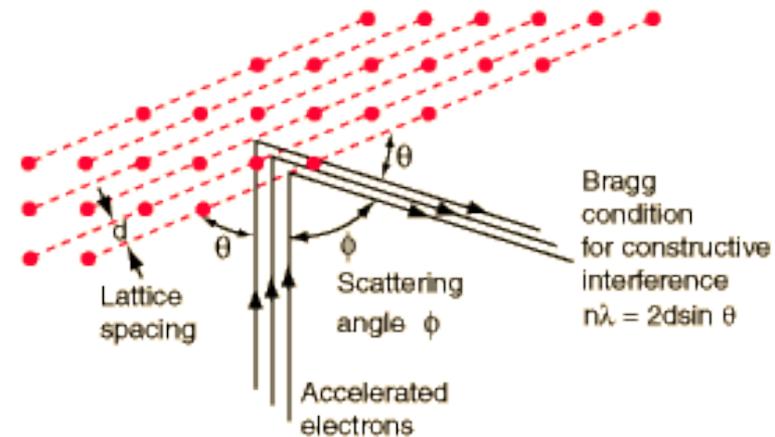
物质波的物理意义？？

戴维孙-革末实验：1927



Clinton Joseph Davisson (left,
October 22, 1881 – February 1,
1958)

Lester Halbert Germer (October 10,
1896 – October 3, 1971)



薛定谔方程：1925

- 1925年冬天，薛定谔带着他的一位情人去滑雪度假，在此期间，为德布罗意波写出了波动方程，通过求解，得到了氢原子的能级。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t).$$

- 1926年春发表。



12 August 1887,---
4 January 1961

薛定谔方程：1925

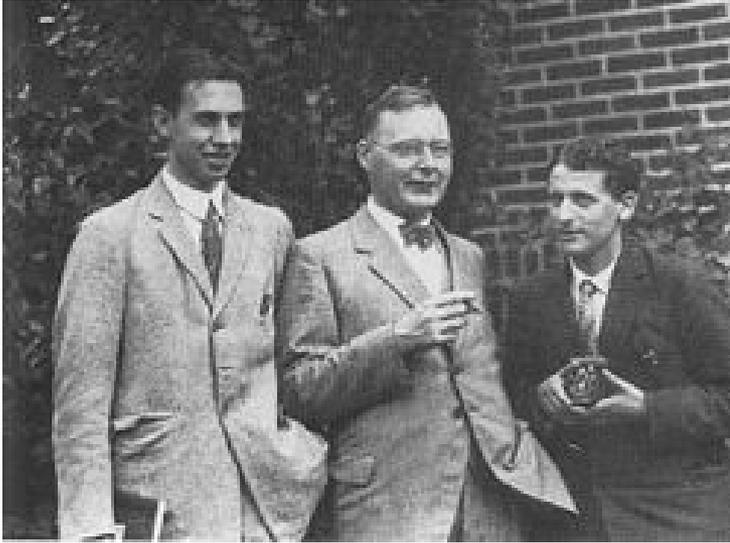
- 德拜认为需要一个波动方程
- 薛定谔认为自由粒子由平面波描述
- 推广，先求得相对论性的方程，有困难，再退回非相对论的方程。



**Peter Joseph
William Debye**
(March 24, 1884 –
November 2, 1966)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t).$$

克拉默斯： 1925



Hans Kramers (center) with [George Uhlenbeck](#) and [Samuel Goudsmit](#), *circa* 1928.

February 2, 1894 – April 24, 1952

- 克拉默斯是玻尔的学生，跟随玻尔10余年，是把玻尔的原子概念推向极致的主要人物。
- 克拉默斯主要研究发射谱线的强度，在此过程中提出了不用轨道概念，成为矩阵力学的先导。



[George Uhlenbeck](#)



王明贞和俞启忠

1925--1926年，海森堡

- 海森堡在养病期间，提出了必须放弃轨道的概念，用可以观察的物理量建立理论的观念
- 建立了矩阵力学的雏形



Werner Heisenberg
(5 December 1901 –
1 February 1976)

海森堡的矩阵力学

- 海森堡把能级之间的跃迁振幅作为基本量，并排列成方阵
- 发现方阵的计算规则非常奇怪：乘法不能交换

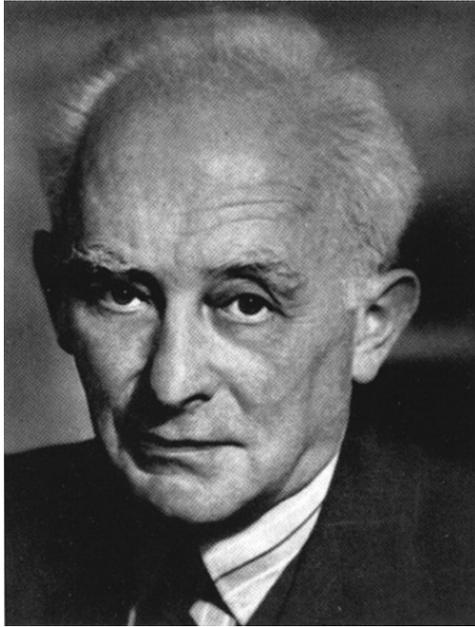
$$AB \neq BA$$

海森堡的矩阵力学

- 他的导师，波恩意识到这就是数学上的矩阵
- 约旦加入，三人共同建立了矩阵力学，乘法规则满足矩阵运算规则
- 量子化条件

$$x p - p x = i\hbar$$

波恩，约旦和海森堡



Max Born

(11 December 1882 –
5 January 1970)



Pascual Jordan

(18 October 1902—
31 July 1980)

薛定谔：两种理论等价

- 1926年，薛定谔证明了他的波动力学和海森堡，约旦和波恩的矩阵力学在数学上是等价的。
- 后来，狄拉克建立了量子力学的一般形式，波动力学和矩阵力学是一般形式的两种重要表象。

翻译者：彭桓武

彭桓武先生曾经是两种理论的翻译者



1946-47，都柏林，Cecile Morette



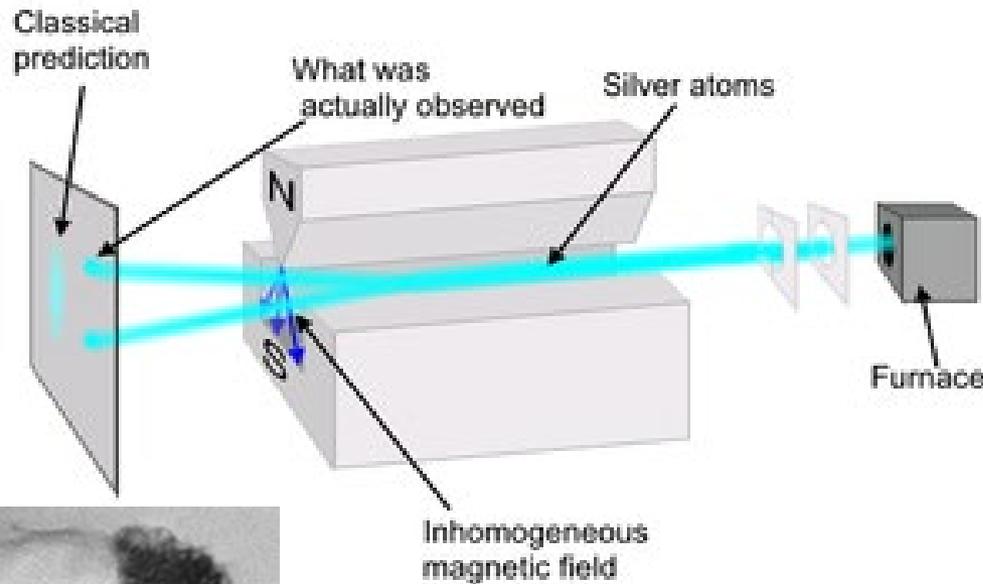
2005年，师生相会北京

In 1951, I created the Ecole de
Physique aux Houches



和大师在一起，2003

斯特恩-盖拉赫实验： 1922



Walt(h)er Gerlach
(1 August 1889 –
10 August 1979)



Otto Stern
(17 February 1888 –
17 August 1969)

波恩：统计解释

- 薛定谔的波动方程的解：

本征值是允许的能级，波函数代表什么？

- 波恩的解释：波函数模的平方代表找到粒子的概率。

海森堡：不确定原理

- 1927年，海森堡提出不确定原理：

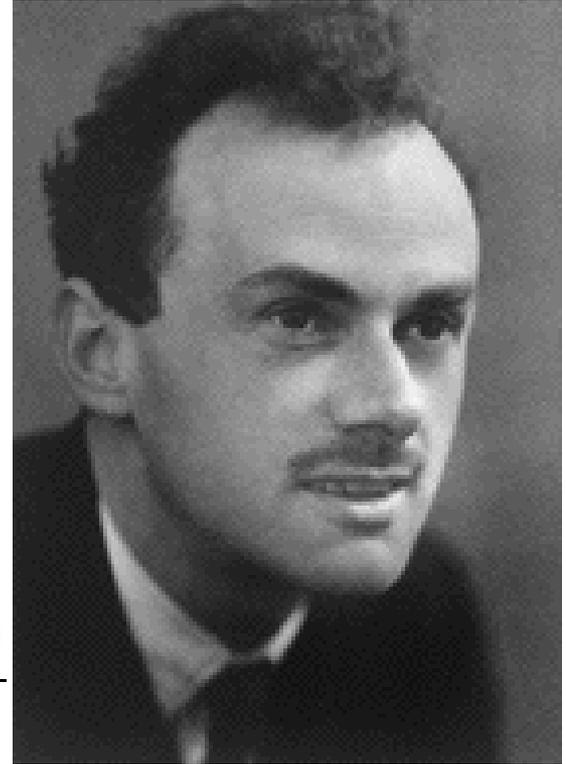
对于一个粒子，其位置和动量不可能同时确定。其中一个的精度越高，另一个就越低，二者之间满足

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

狄拉克方程：1929

- 狄拉克：把物理做成艺术
- 狄拉克方程：

$$\left(\beta mc^2 + \sum_{k=1}^3 \alpha_k p_k c \right) \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$



Paul Adrien Maurice Dirac
(August 1902 – 20 October 1984)

狄拉克方程：1929

- 1929年，狄拉克建立了相对论的波动方程
- 方程自动给出电子的自旋
- 方程既有正能量的解，也有负能量的解
- 狄拉克认为，负能量的解对应于反物质
- 正电子的发现验证了狄拉克的理论

狄拉克符号

- 状态：希尔伯特空间的矢量，记为 $|\ \rangle$ ，例如 $|a\rangle$
- 物理量：希尔伯特空间的算符，记为 \hat{A}
- 狄拉克符号已经成为量子力学的标准记号



海森堡，25岁



薛定谔，39岁



玻恩，43岁



泡利，26岁



狄拉克，27岁



爱因斯坦，26岁



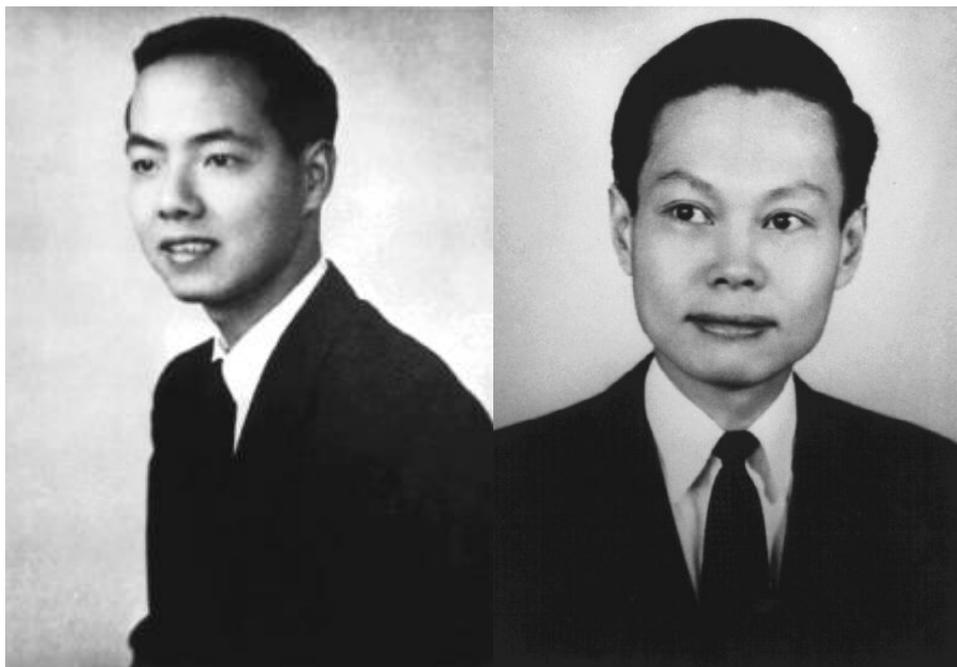
普朗克, 42岁



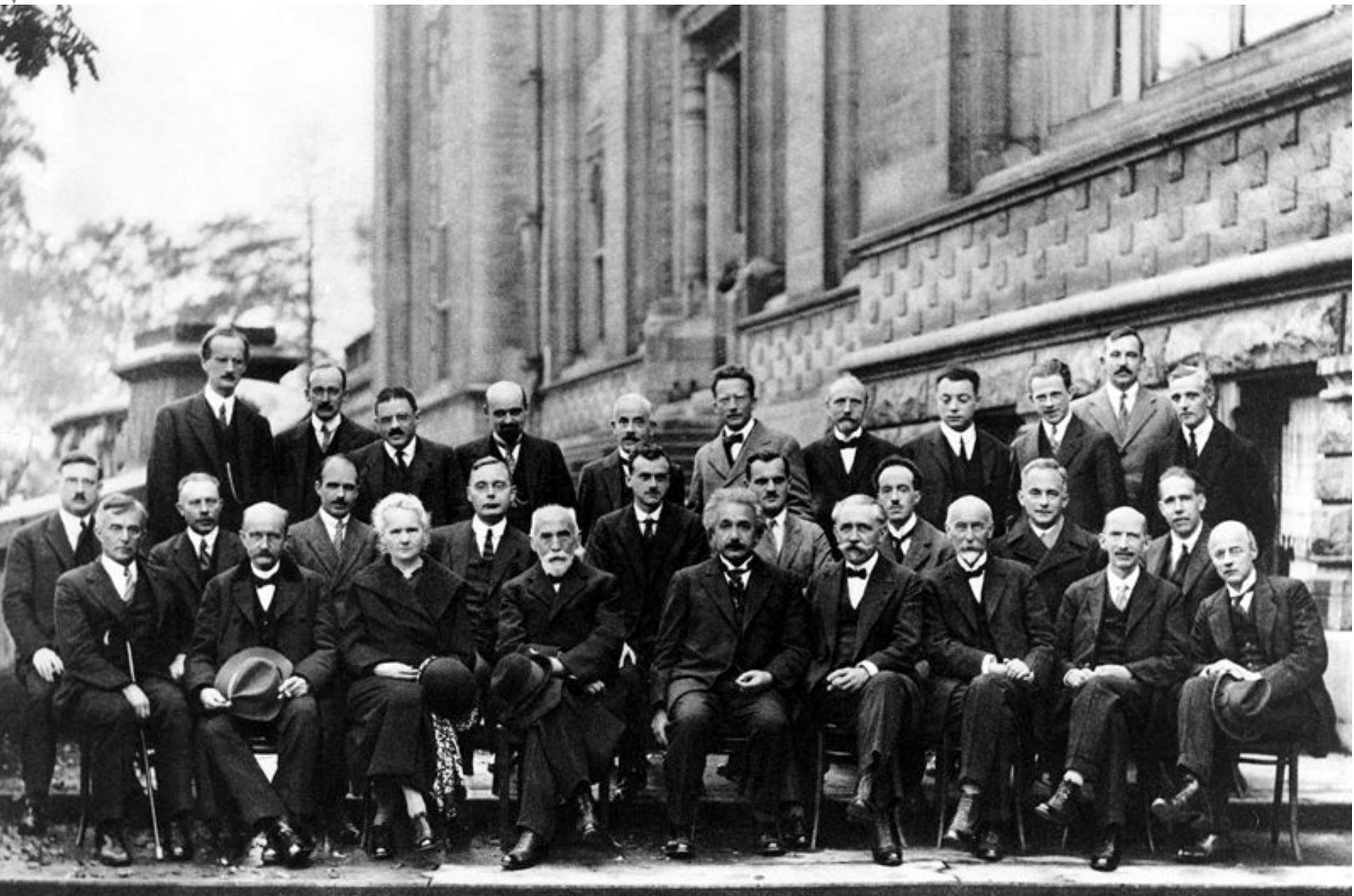
德布罗意, 32岁



约旦, 24岁



李政道, 31 杨振宁, 35岁



1927 Solvay Conference on Quantum Mechanics

