

量子波澜-5

上海交通大学机械与动力学院

玻尔和爱因斯坦

量子力学的正统解释，哥本哈根学派

- 1, 波函数为概率幅，满足叠加原理
- 2, 测量和波函数的塌缩
- 3, 全同粒子不可分辨

... ..



波函数：

粒子由一个复函数 $\Psi(\vec{r}, t)$ 表示，称为波函数，或概率幅。

玻恩几率解释： 如果在时刻 t ，对以波函数 $\Psi(\vec{r}, t)$ 描述的粒子进行位置测量，测得的结果可以是不同的，而在 \vec{r} 的一小区域 dV 中发现该粒子的概率为 $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$.
($\int P(\vec{r}, t) dV = 1$).



$\Psi(\vec{r}, t)$ 不是对物理量的波动描述. 它有意义的
是, 在 \vec{r} 处体积元 dV 中发现粒子的概率为 $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$,
它不代表物理实体, 仅是一概率波;



粒子由波函数 $\Psi(\vec{r}, t)$ 来描述，但波函数并不能告诉你， t 时刻测量时，粒子在什么位置。粒子位置可能在 \vec{r}_1 ，可能在 \vec{r}_2 ，而在 \vec{r}_1 处 dV 中发现粒子的概率为 $|\Psi(\vec{r}_1, t)|^2 dV$ 。也就是说， $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ 在某处越大，则在 t 时刻测量发现粒子在该处的机会越多。（这表明，我们讲的是能预言到什么，但我们不能说测量的结果）



如何理解

如果对一个体系去测量，发现粒子可能就处于 \vec{r}_1 ，只测得一个值。

但可想像有很多很多同样的体系，对体系进行同时，完全相同的测量，测得的结果发现

n_1 次, 在 \vec{r}_1 的 dV 内

n_2 次, 在 \vec{r}_2 的 dV 内

...

n_n 次, 在 \vec{r}_n 的 dV 内

...

当对足够多的同样的体系进行测量后, 即在大量的完全相同的体系中, 同时测量, 发现粒子在 \vec{r}_i 处的概率为

$$\frac{n_i}{\sum_j n_j} = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$



体系的波函数 $\Psi(\vec{r}, t)$ 给出了体系所有信息（可能范围内的），它给出体系一个完全的描述（例如，测量粒子的能量时，可以预言可能测得那些能量值和测得该能量值的概率等等）。正因为如此，我们可以说波函数描述了体系所处的量子状态，或称状态。以 $\Psi(\vec{r}, t)$ 描述体系，就称体系处于 $\Psi(\vec{r}, t)$ 态，或称 $\Psi(\vec{r}, t)$ 为体系的态函数。



由于波恩在量子力学中所作的基础研究，特别是波函数的统计解释，他分享了1954年诺贝尔物理学奖。(哥本哈根解释, orthodox)

量子力学还有其它大同小异的解释 和 一些很不相同的解释， 但似乎哥本哈根解释是最为自恰的.

波恩的理论赋予波函数以下基本性质:

波函数是单值、连续、有限的.

单值: 实际上仅需 $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ 单值.

连续： 由于 $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$ 为粒子处于 \vec{r} 点 dV 中的概率. 所以在两个相邻的相同无限小体积元中的概率应该相差无限小.

有界： 是指 $|\int \Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$ 有界， 即使是在某些孤立奇点也可能不违背波函数这一性质。只要在包含它的小区域中的概率有界.

波函数平方可积.

波函数的归一化:

重要的是相对概率, $|\Psi|^2 dx$ 和 $C|\Psi|^2 dx$ 的相对概率分布是完全相同的, 描述同一量子状态。所以差一常数因子的波函数是完全相同的。

为了得到概率, 波函数应归一化。

$$\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$$

即使归一化了, 仍可有一相因子的差别 $e^{i\alpha}$ (α 为实数)。



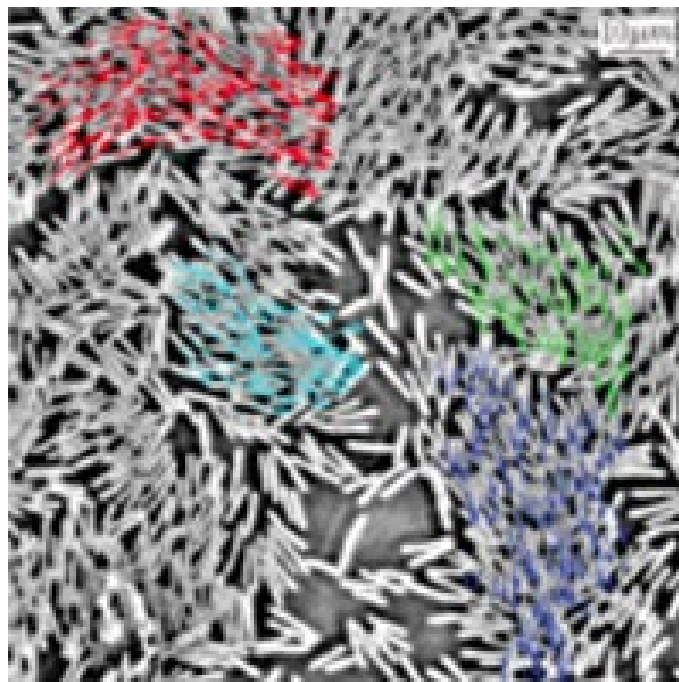
波函数叠加原理：

如果 Ψ_1, Ψ_2 是系统的可能态， 则其线性组合

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2$$

也是系统的可能态.

- 张何朋
- hepeng_zhang@sjtu.edu.cn
- <http://ins.sjtu.edu.cn/people/hpzhang/>





量子力学的基本假定一：

描写微观系统状态的数学量是希尔伯特空间中的矢量。相差一个复数因子的两个矢量，描写同一状态。

量子力学的基本假定二：

(1). 描写微观系统物理量的是希尔伯特空间中的厄米算符；

(2). 物理量所能取的值，是相应算符的本征值；

(3). 物理量 A 在状态 $|\psi\rangle$ 中取各值 a_i 的概率由下式决定：

设： $A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle, \quad \langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$$

则： $P(a_i) = |c_i|^2$

一点数学:

右矢量: $|a\rangle$; 算符 A , 定义为 $A|a\rangle$ 成为另一个右矢量 $|b\rangle = A|a\rangle$.

左矢量: 对应于每个右矢量 $|a\rangle$, 有一个左矢量 $\langle a|$.

矢量的内积: $\langle b|a\rangle$ 是一个复数, 且 $\langle b|a\rangle^* = \langle a|b\rangle$. $\langle a|a\rangle \geq 0$.

矢量的长度: $\sqrt{\langle a|a\rangle}$

算符的厄米: 定义 A 的厄米 A^+ : $\langle a|A^+|b\rangle = \langle b|A|a\rangle^*$

厄米算符: 如果 $A^+ = A$, 则 A 是厄米算符。

厄米算符的本征值都是实数; 厄米算符对应于不同本征值的本征矢量正交。

完备性关系: $\sum_a |a\rangle\langle a| = 1$.

对任意算符 A , $\langle \psi|A^+A|\psi\rangle \geq 0$



量子力学的基本假定二：

(4). 处于 $|\psi\rangle$ 态的系统， 如果测量物理量 A 的值 a_i ， 则这个系统在测量后进入 A 的本征态 $|a_i\rangle$.

量子化条件

$$p_x x - x p_x \equiv [p_x, x] = \frac{\hbar}{i}$$

对 y , z 分量类似, 其他对易式为0。

量子力学基本假定三：

若一个微观粒子处于状态 $|\psi\rangle$, 对其测量力学量 A , 测量的平均值为

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

注意：这里的平均是指对于大量相同状态测量的平均。

量子力学基本假定四：

量子系统的演化满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle$$

其中 H 为系统的能量算符，通常成为哈密顿算符，或简称哈密顿

不确定关系的证明:

若 p 的不确定为 Δp , x 的不确定为 Δx ,

$$\Delta p = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}, \quad \Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$$

令 $A = p - \langle p \rangle$, $B = x - \langle x \rangle$, 于是

$$0 \leq \langle (A + i\lambda B)(A - i\lambda B) \rangle = \langle A^2 \rangle + \lambda^2 \langle B^2 \rangle + i\lambda \langle (BA - AB) \rangle$$

由于 $BA - AB = xp - px = -\frac{\hbar}{i}$. 所以, 上式成为:

$$\langle A^2 \rangle + \lambda^2 \langle B^2 \rangle - \lambda \hbar \geq 0$$

要求

$$\hbar^2 - 4\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \leq 0$$

即

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

薛定谔方程，分离变量. 如果哈密顿算符（能量算符）与时间无关

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi$$

令 $\Psi(\vec{r}, t) = T(t)\psi(\vec{r})$

$$i\hbar \frac{dT}{dt} = TH\psi, \quad i\hbar \frac{dT}{dt} = ET$$

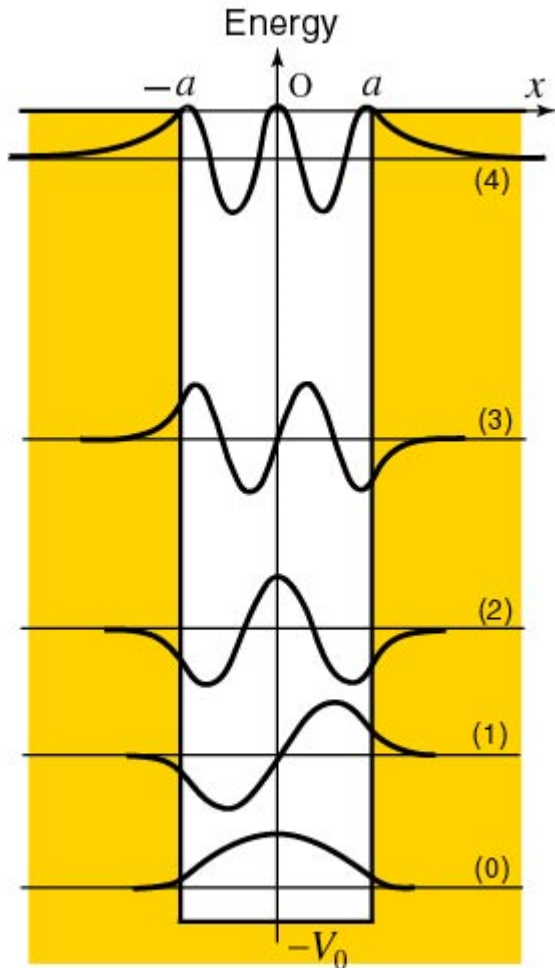
$$H\psi = E\psi$$

$$T \sim e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

$$\Psi = \psi e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

量子力学练习题

Fig. (B)




方阱势

The thick solid curves are the wave functions.

(0) : the ground state

(1) (2) (3) ... : the excited states


$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\psi = 0 \quad \text{其他情况}$$

令 $\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, 则

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi = 0$$

$$\psi = A \sin(\alpha x + \phi)$$

$$A \sin(\alpha a + \phi) = A \sin(\phi) = 0$$

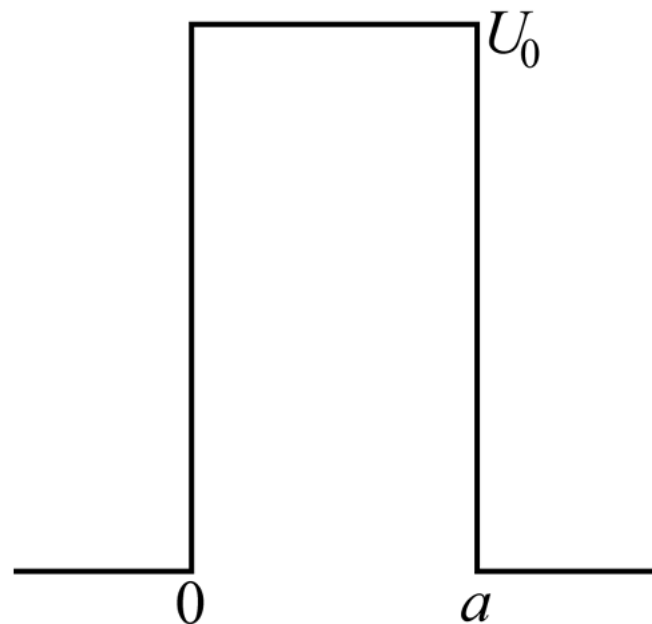
解得： $\phi = 0, \alpha = \frac{n\pi}{a}, n = 1, 2, \dots$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

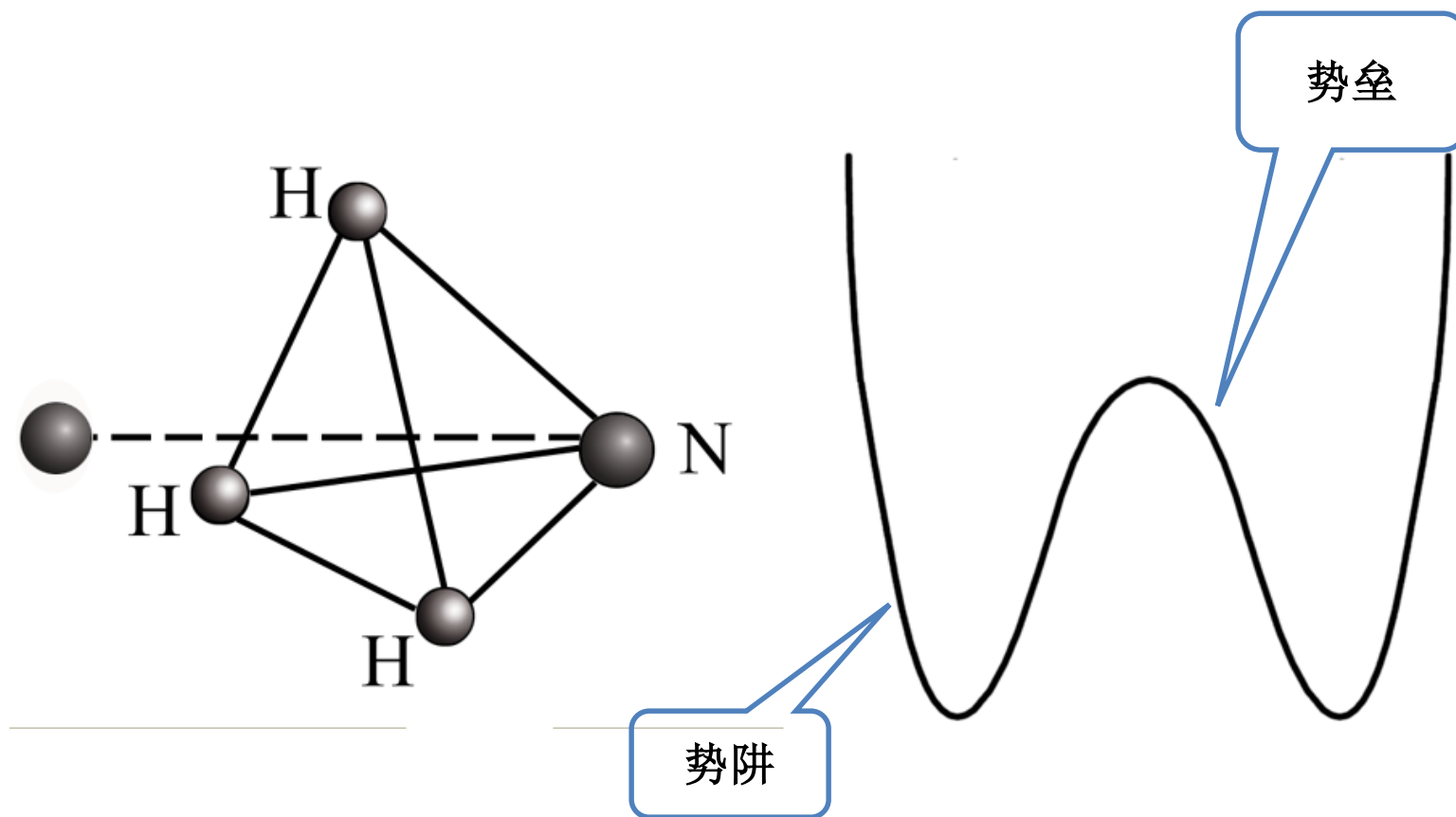
势垒

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x \leq 0, \quad x \geq a \end{cases}$$

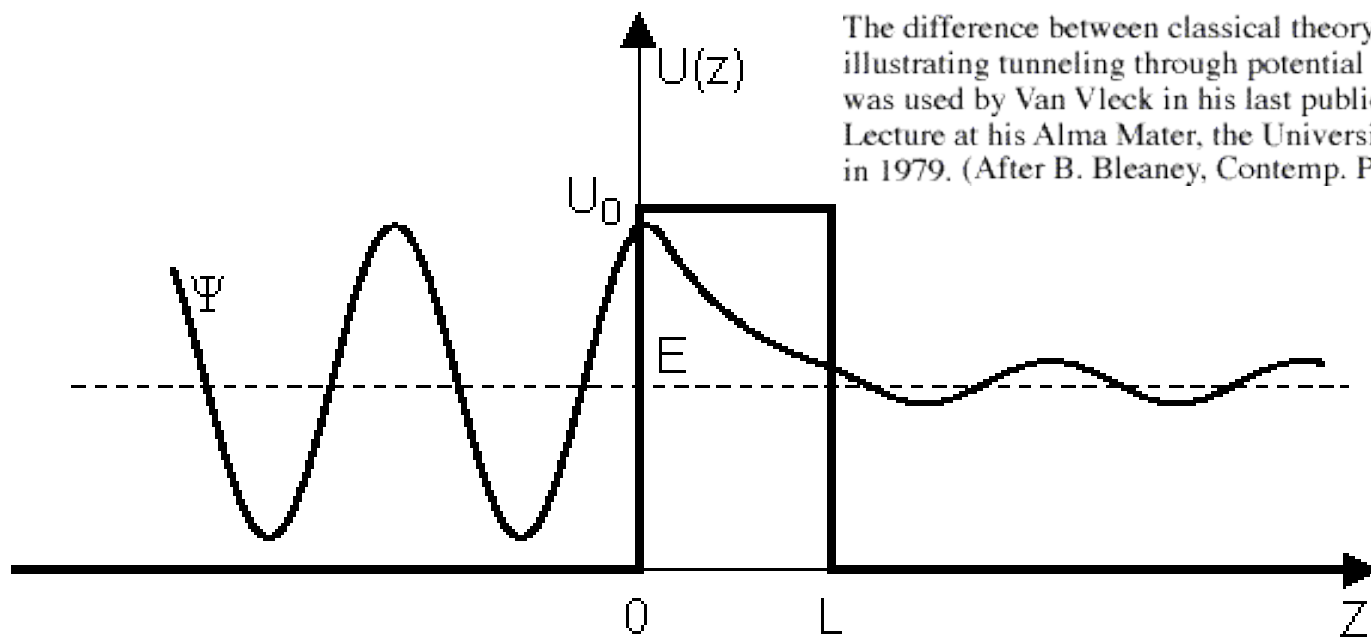
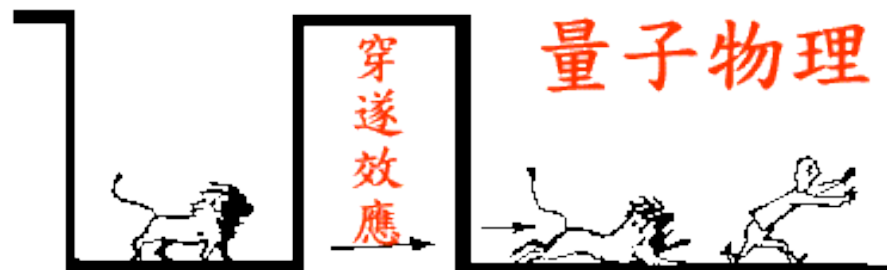


在经典的情形，只有能量高于 U_0 的粒子可以越过势垒。

对于微观粒子,



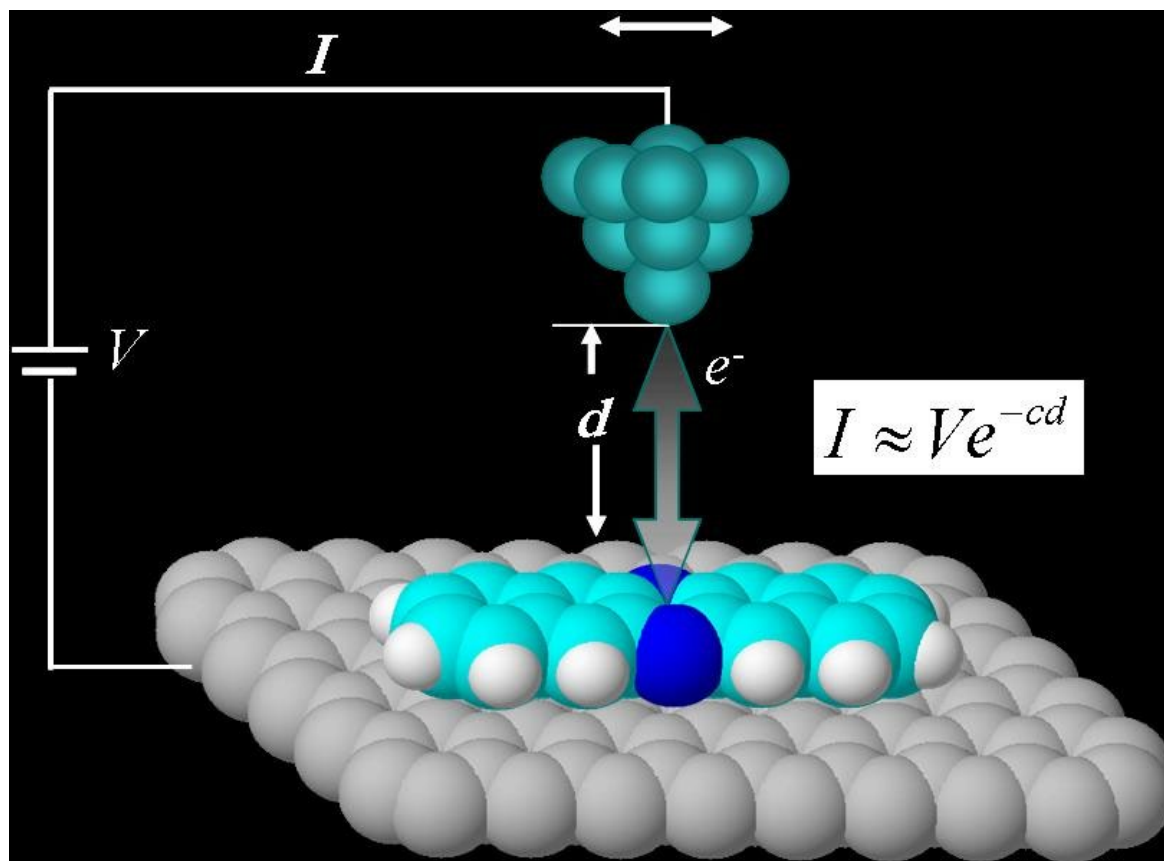
隧道效应

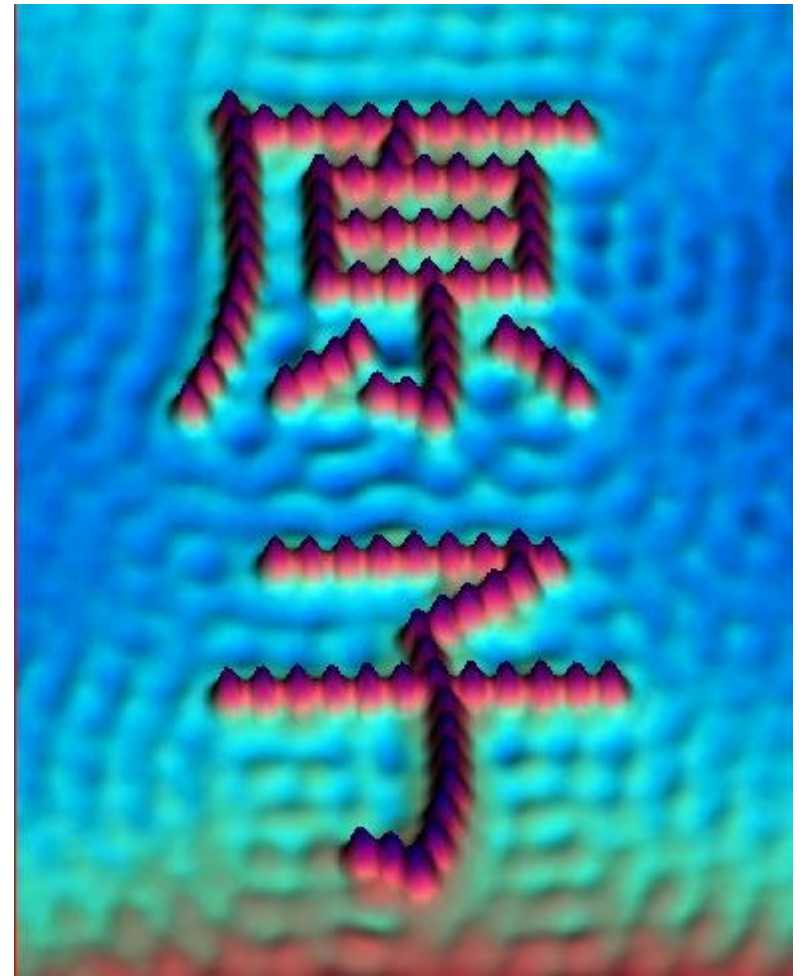
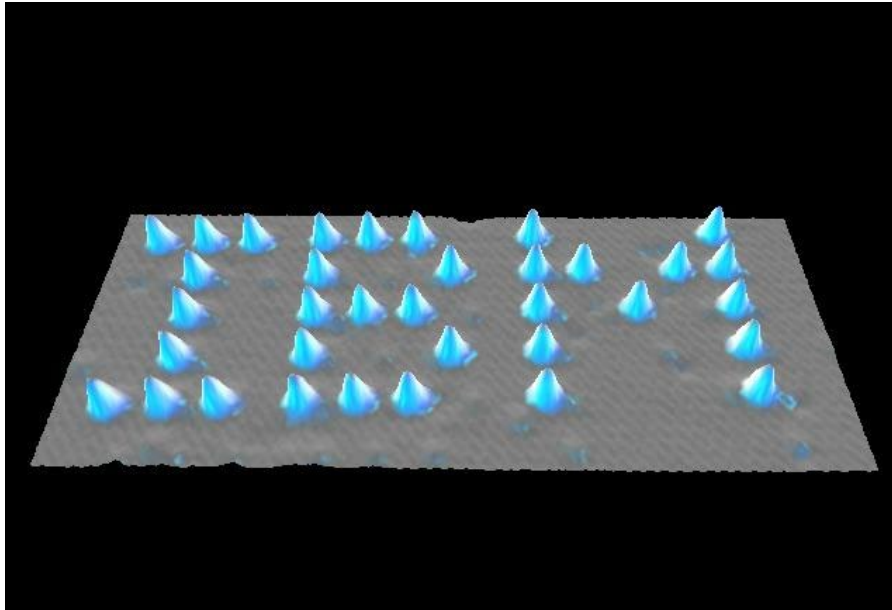


The difference between classical theory and quantum theory, illustrating tunneling through potential barrier. This illustration was used by Van Vleck in his last publication, the Julian E. Mack Lecture at his Alma Mater, the University of Wisconsin, in 1979. (After B. Bleaney, *Contemp. Phys.* 25 (1984) 320.)

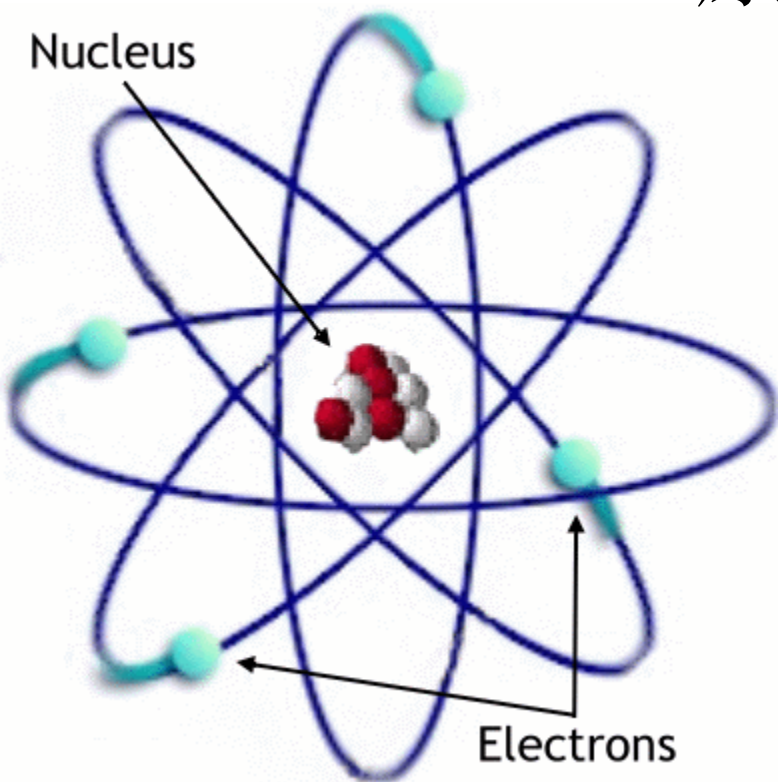
扫描隧道显微镜 (STM)

原子操纵

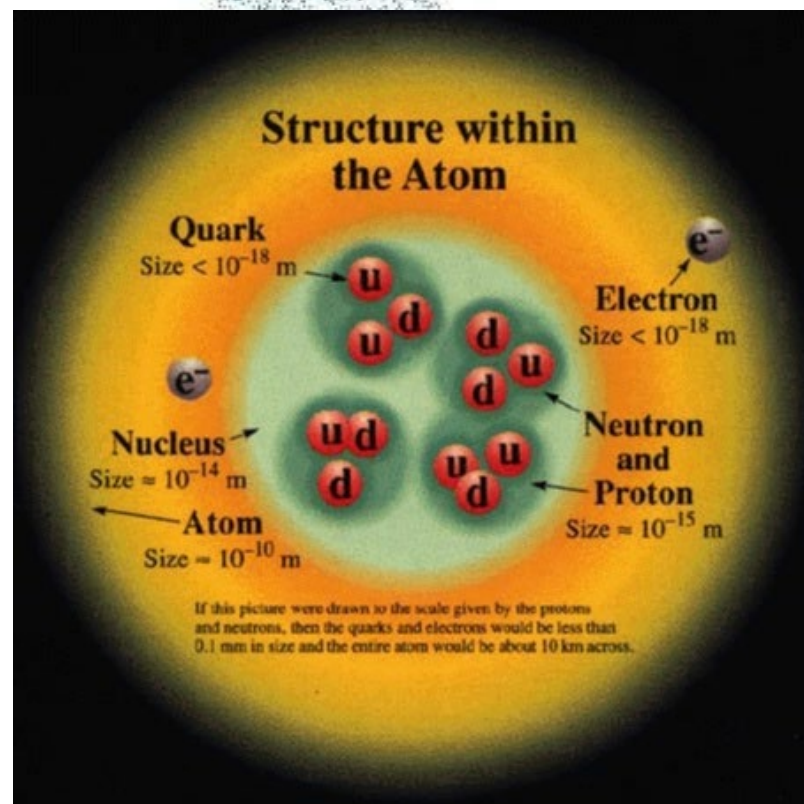
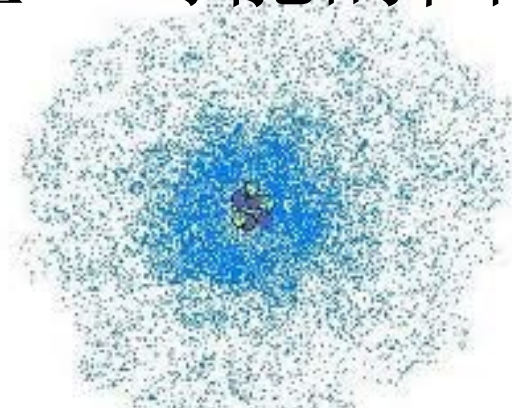


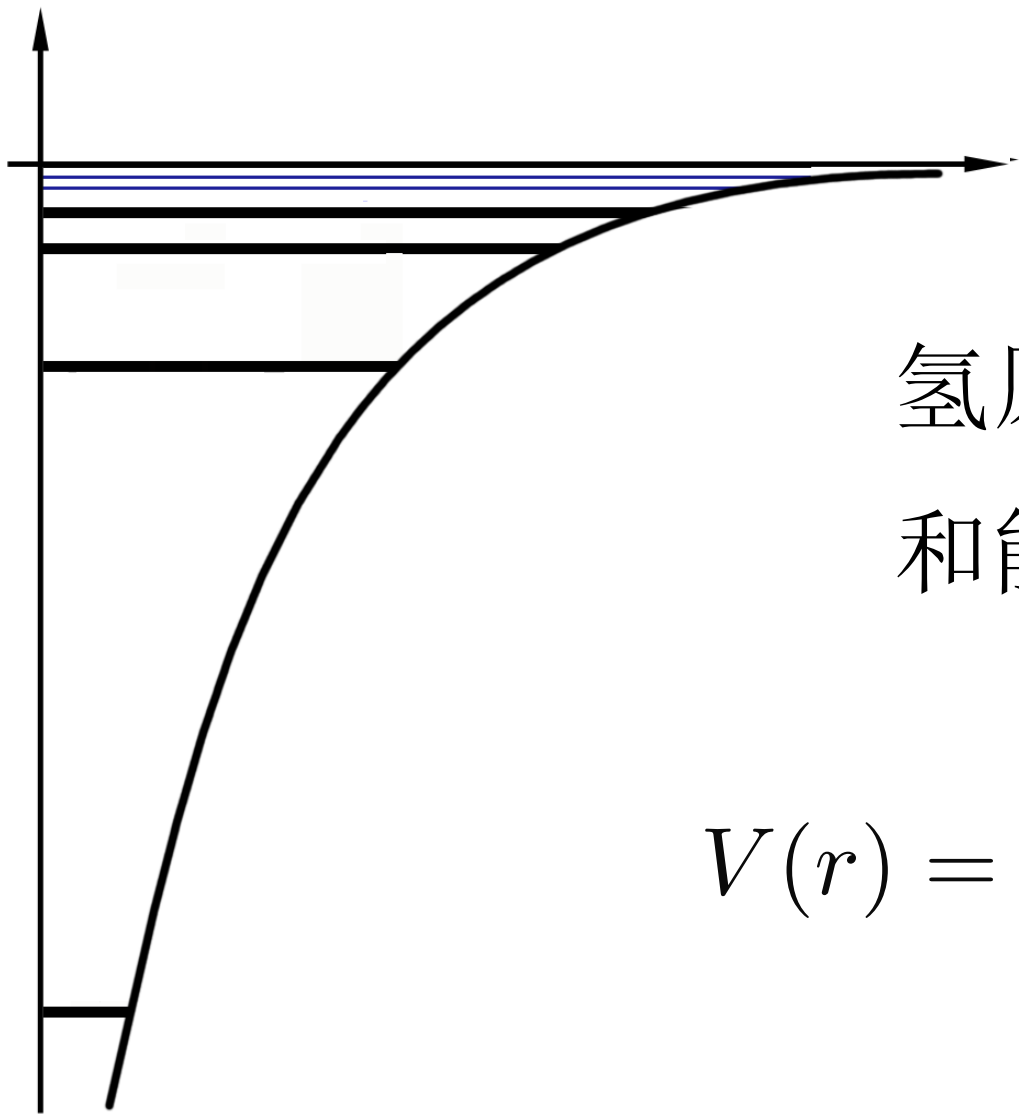


原子模型：可能的图像



原子模型：早期

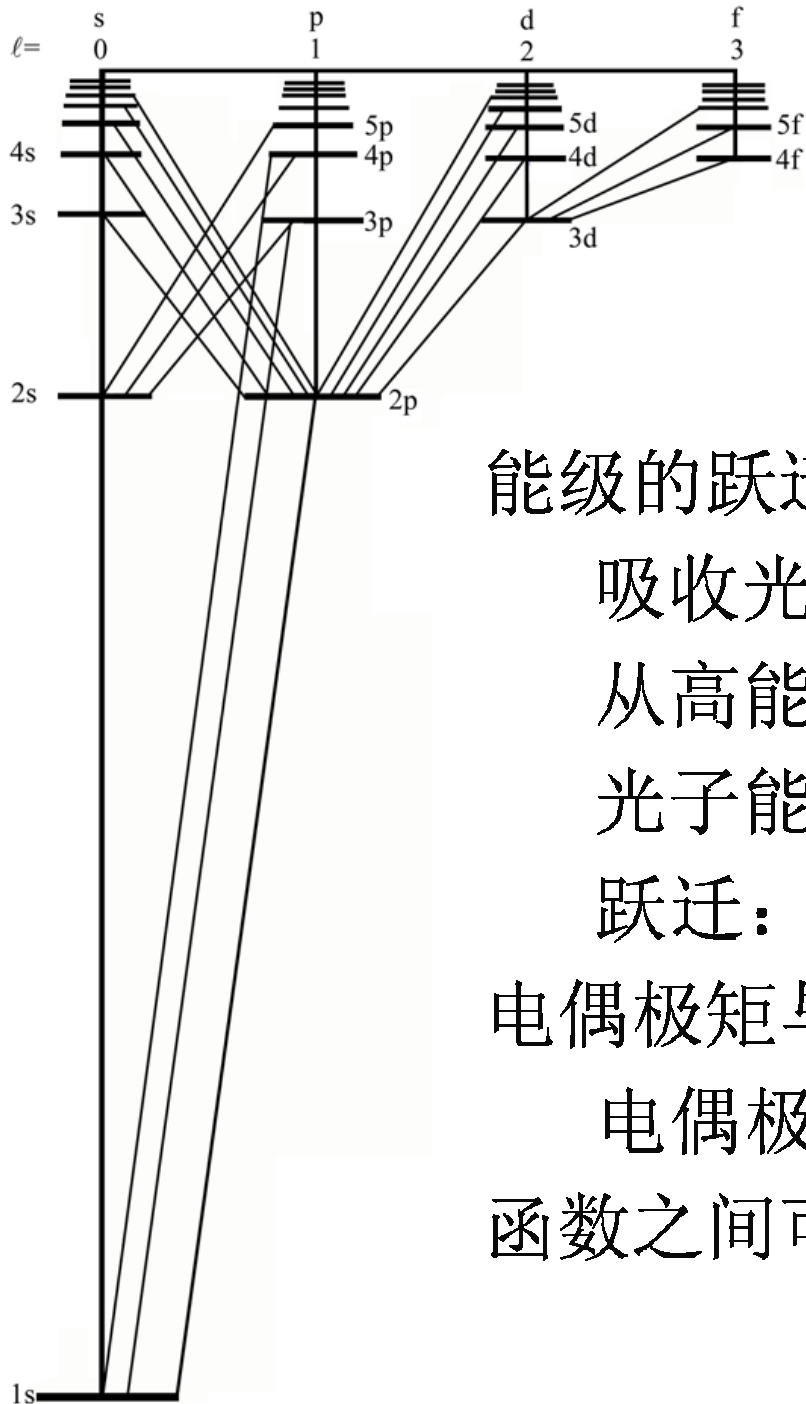




氢原子的库伦势
和能级

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

能级图和跃迁过程



$$|\langle \psi_n | ex | \psi_m \rangle|^2$$

能级的跃迁：

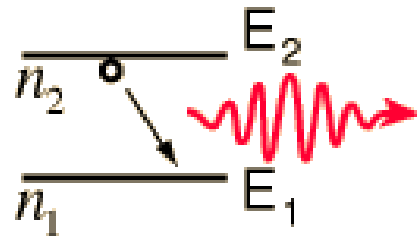
吸收光子，从低能级到高能级。

从高能级到低能级，放出光子。

光子能量： $h\nu = E_n - E_m$

跃迁：辐射场与原子的耦合，低阶，
电偶极矩与场的耦合

电偶极矩，奇函数，不同奇偶性的波
函数之间可以发生跃迁



A downward transition involves emission of a photon of energy:

$$E_{\text{photon}} = h\nu = E_2 - E_1$$

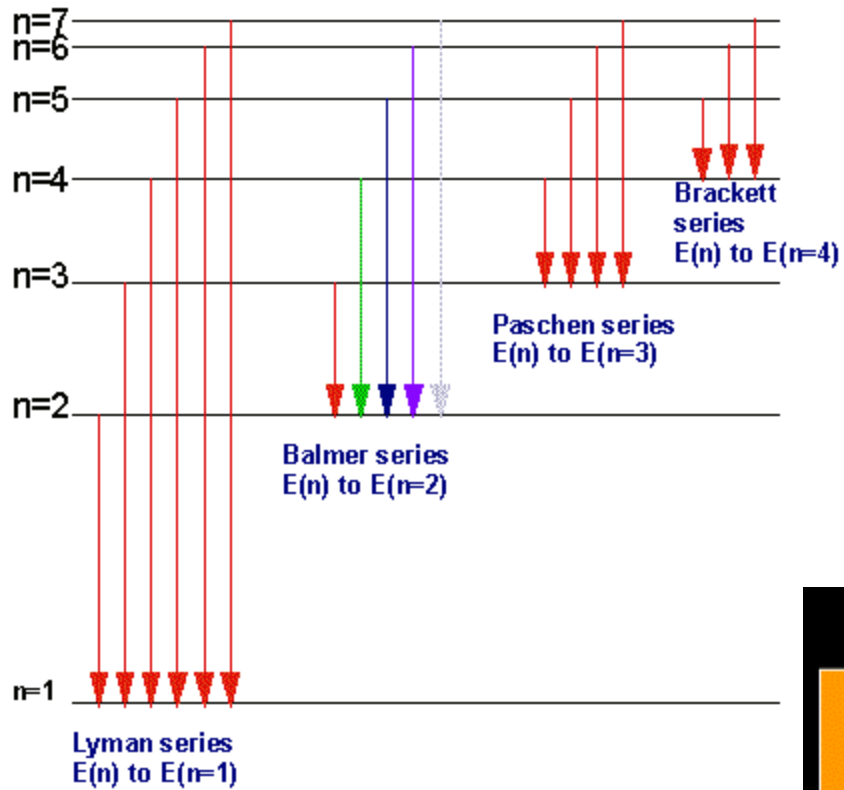
Given the expression for the energies of the hydrogen electron states:

$$h\nu = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] = -13.6 \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \text{eV}$$

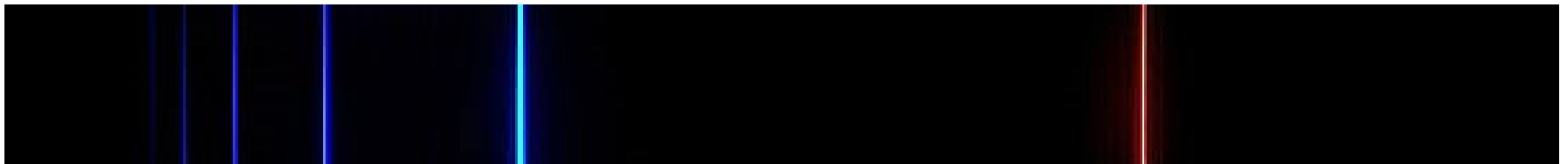
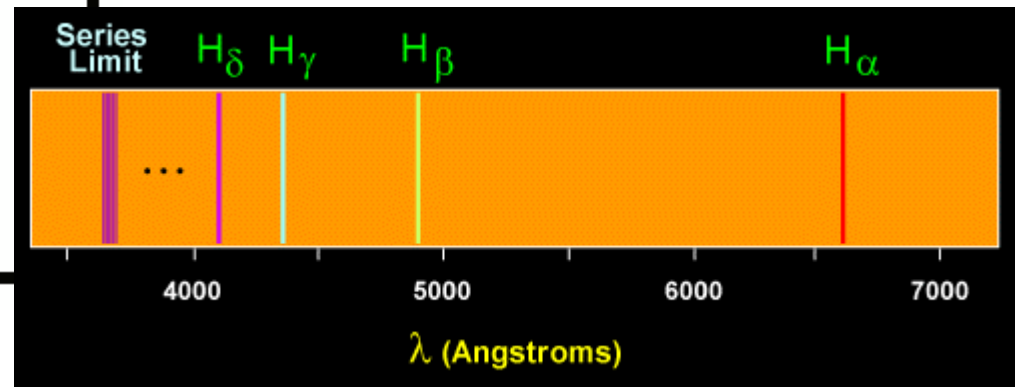
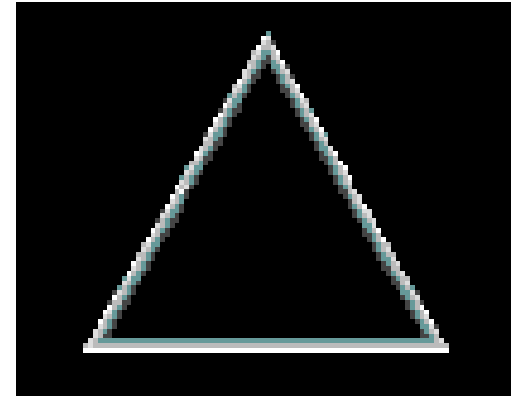
$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \quad \text{where } R_H = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \text{ is called the Rydberg constant.}$$

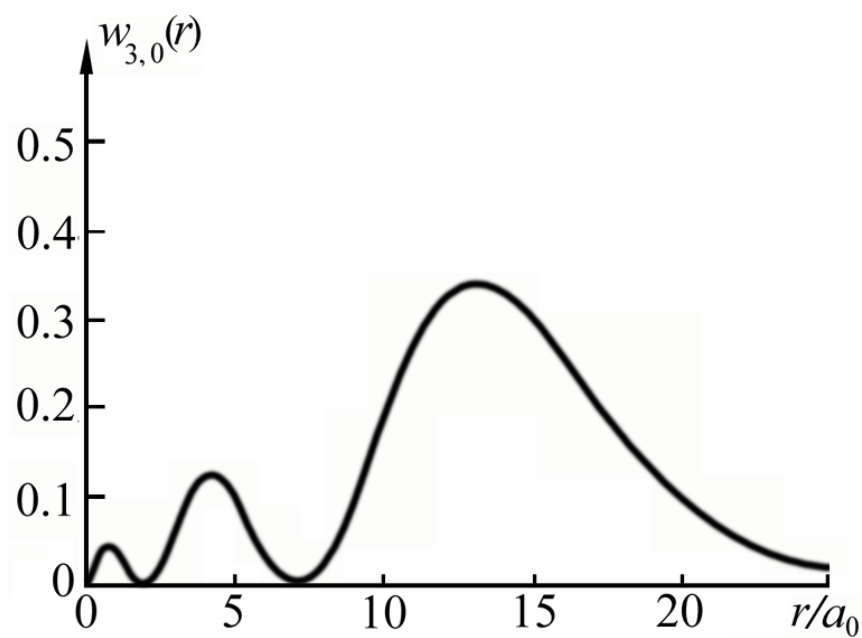
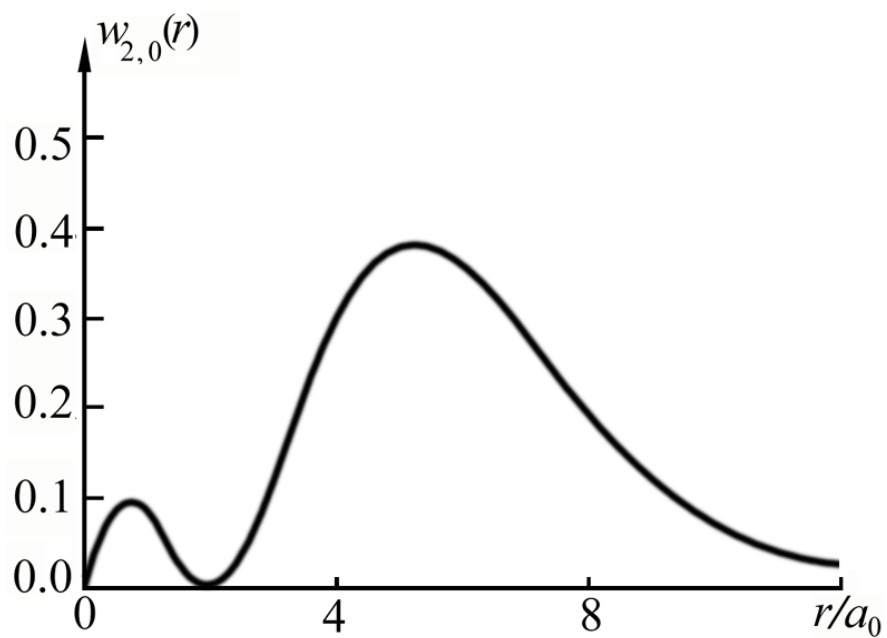
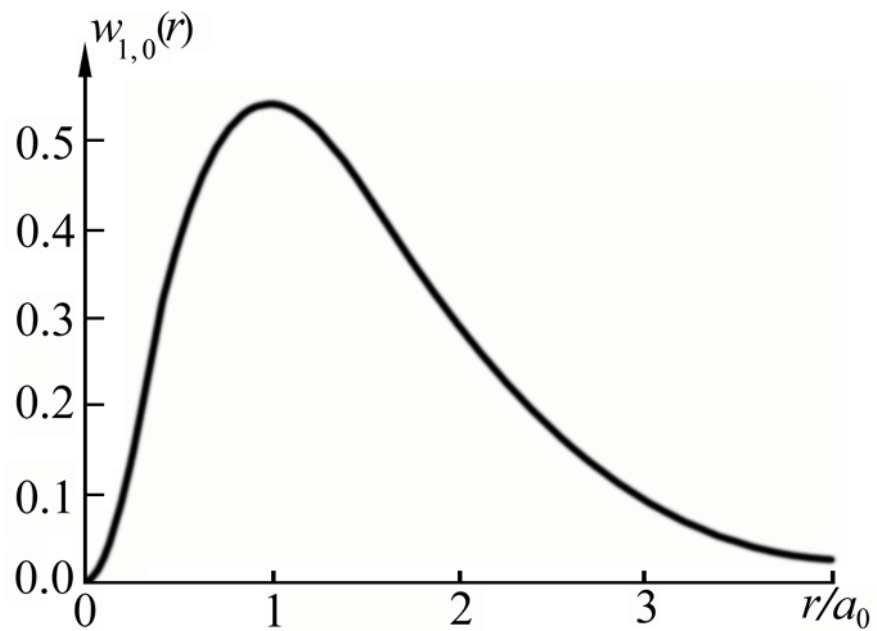
$$R_H = 1.0973731 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Electron transitions for the Hydrogen atom



光谱

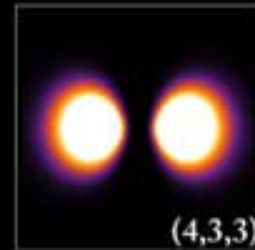
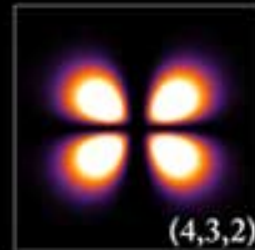
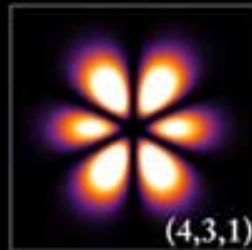
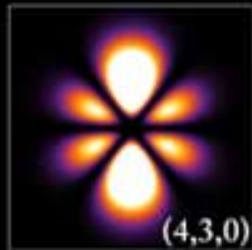
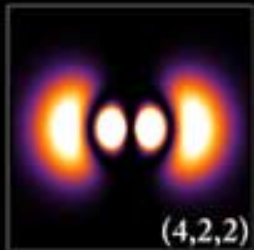
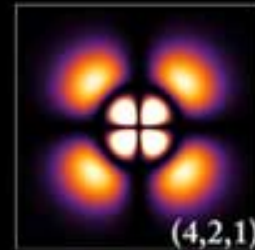
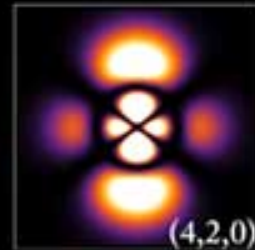
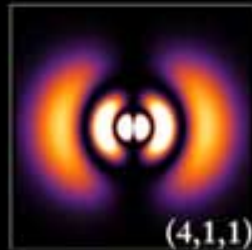
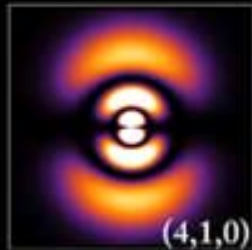
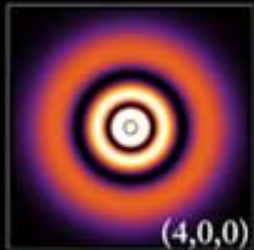
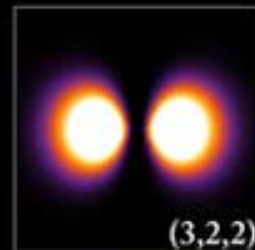
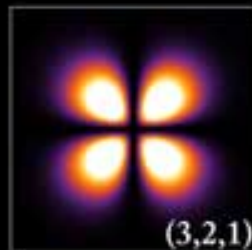
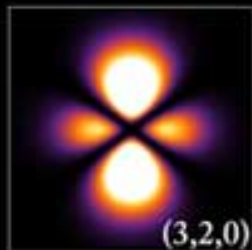
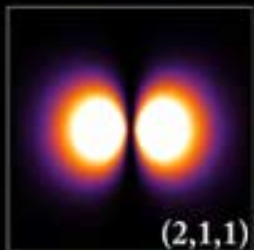
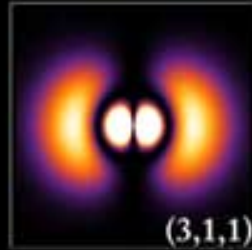
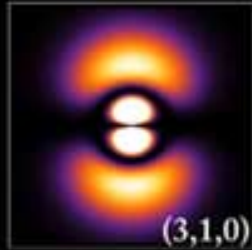
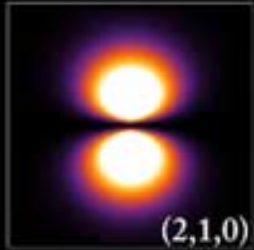
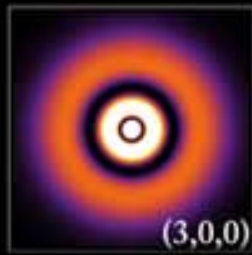
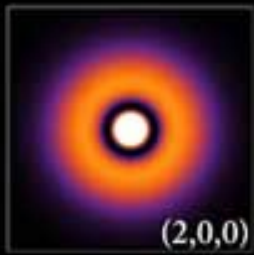


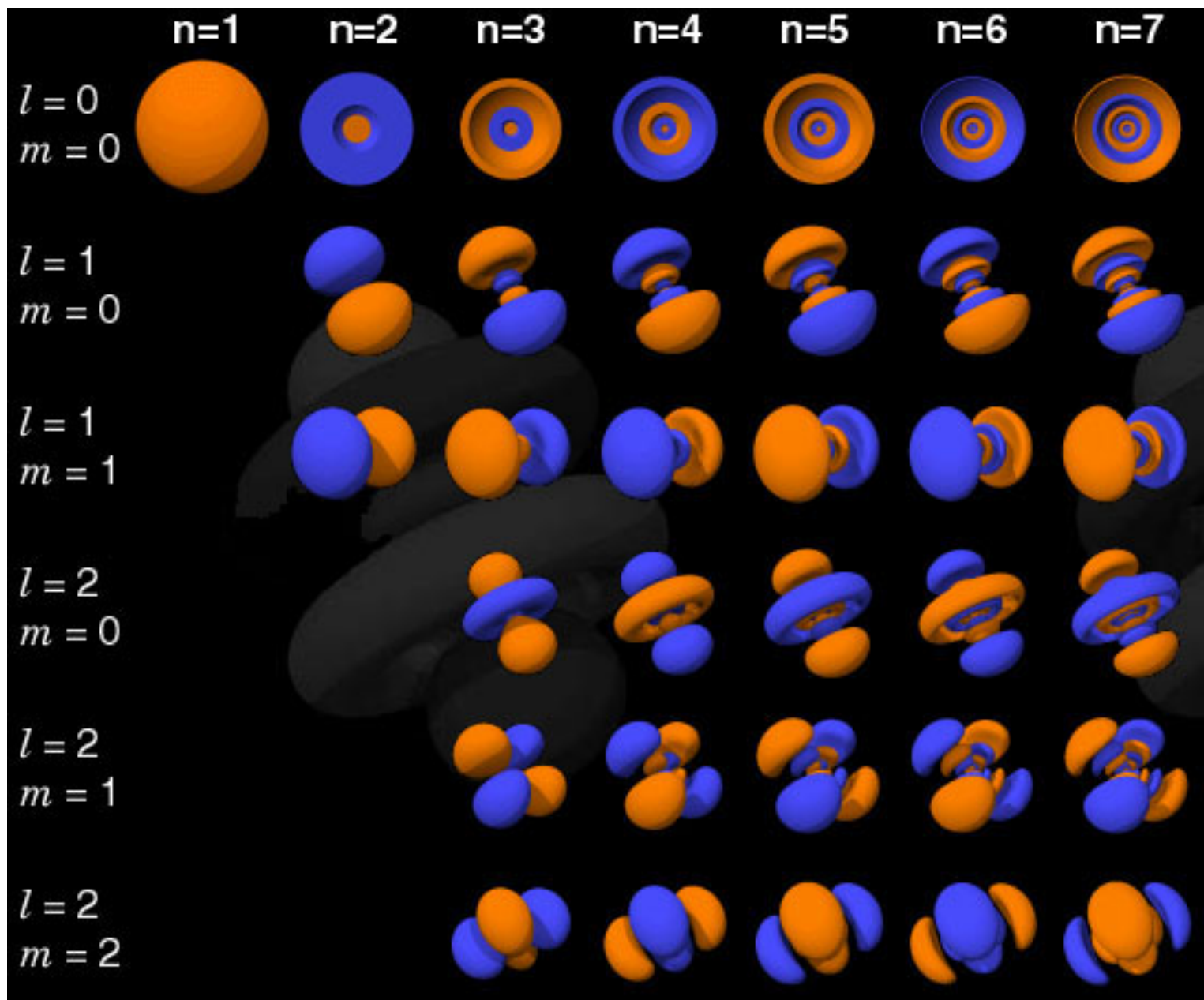


Hydrogen Wave Function

Probability density plots.

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi)}$$





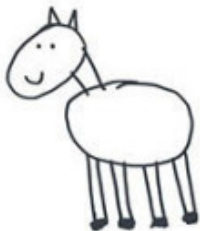
怎样画马



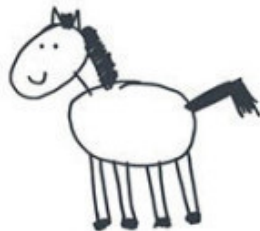
① 画两个圆圈



② 画上脚



③ 画上脸



④ 画上毛发



⑤

再添加其他细节
就大功告成了!

简谐振子:

哈密顿量:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

令:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + i\frac{p}{m\omega} \right), \quad a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - i\frac{p}{m\omega} \right)$$

则

$$H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right)$$

由 p 和 x 的乘法关系, 可得

$$aa^+ - a^+a \equiv [a, a^+] = 1$$

设 a^+a 的本征值为 n , 对应的本征矢量为 $|n\rangle$

$$a^+a|n\rangle = n|n\rangle$$

考虑状态 $a|n\rangle$, 以 a^+a 作用

$$a^+aa|n\rangle = (aa^+ - 1)a|n\rangle = aa^+a|n\rangle - a|n\rangle = (n - 1)a|n\rangle$$

即, $a|n\rangle$ 是 a^+a 的本征矢量, 本征值为 $n - 1$, 故

$$a|n\rangle = C_{n-1}|n - 1\rangle$$

两边与其共轭矢量做内积, 考虑到 $\langle n|n\rangle = 1$,

$$\langle n|a^+a|n\rangle = C_{n-1}^2 = n, \quad C_{n-1} = \sqrt{n}$$

于是：

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

同理可得

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

注意到

$$\langle n|a^+a|n\rangle = n \geq 0$$

而 a 作用在本征态上使得本征值减1，为了保证 a^+a 的本征值大于等于0，向下的递推必须截止，这表明必须存在一个状态 $|0\rangle$ ，使得

$$a|0\rangle = 0$$

由此得到， a^+a 的本征矢量为

$$|0\rangle, |1\rangle = a^+|0\rangle, |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a^+|1\rangle, \dots$$

对应的本征值

$$0, 1, 2, \dots$$

本征能量

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

在位置表象下, $p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$, 于是 $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right)$, 基态波函数 ψ_0 满足

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right) \psi_0 = 0$$

解得

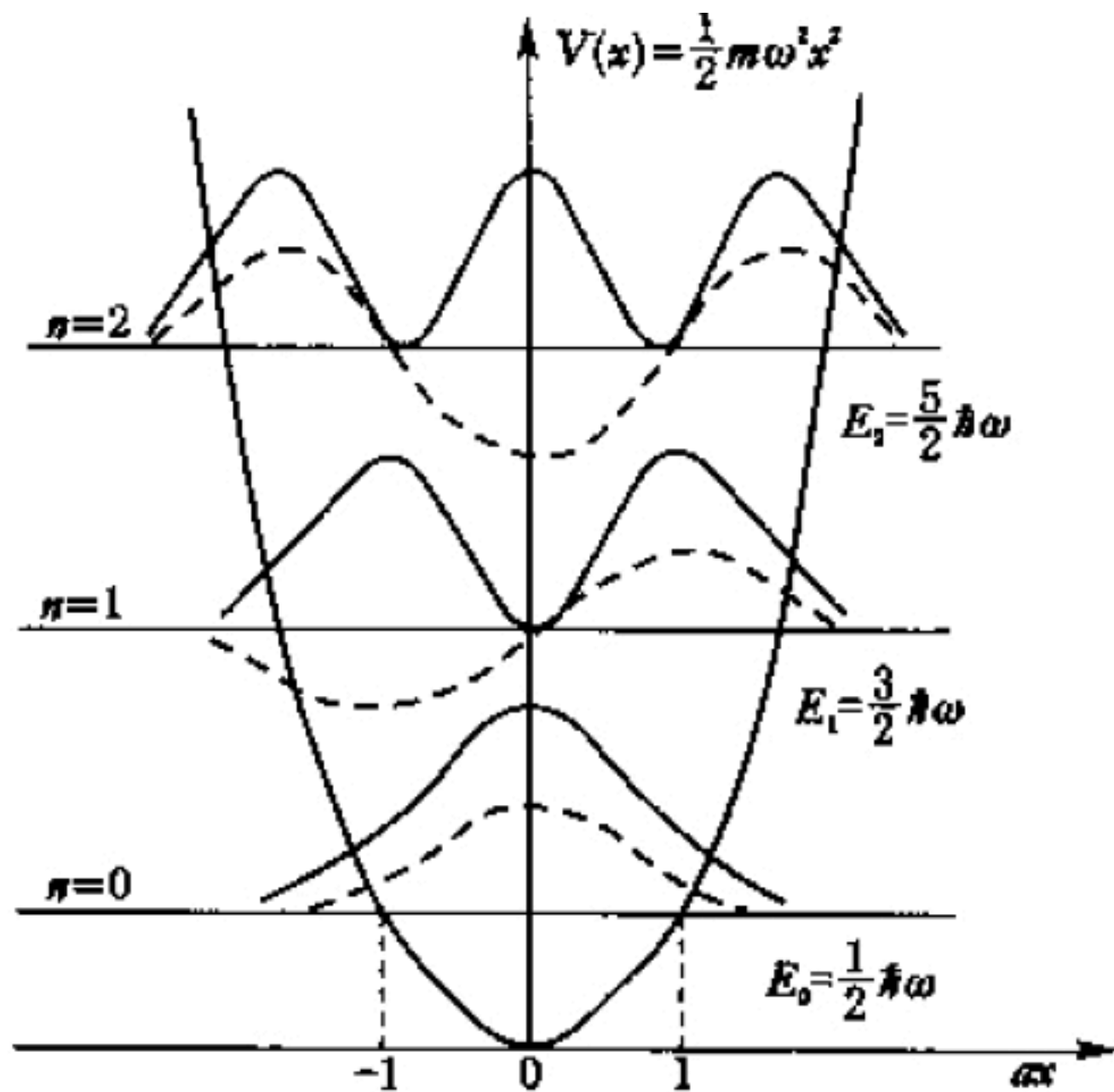
$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

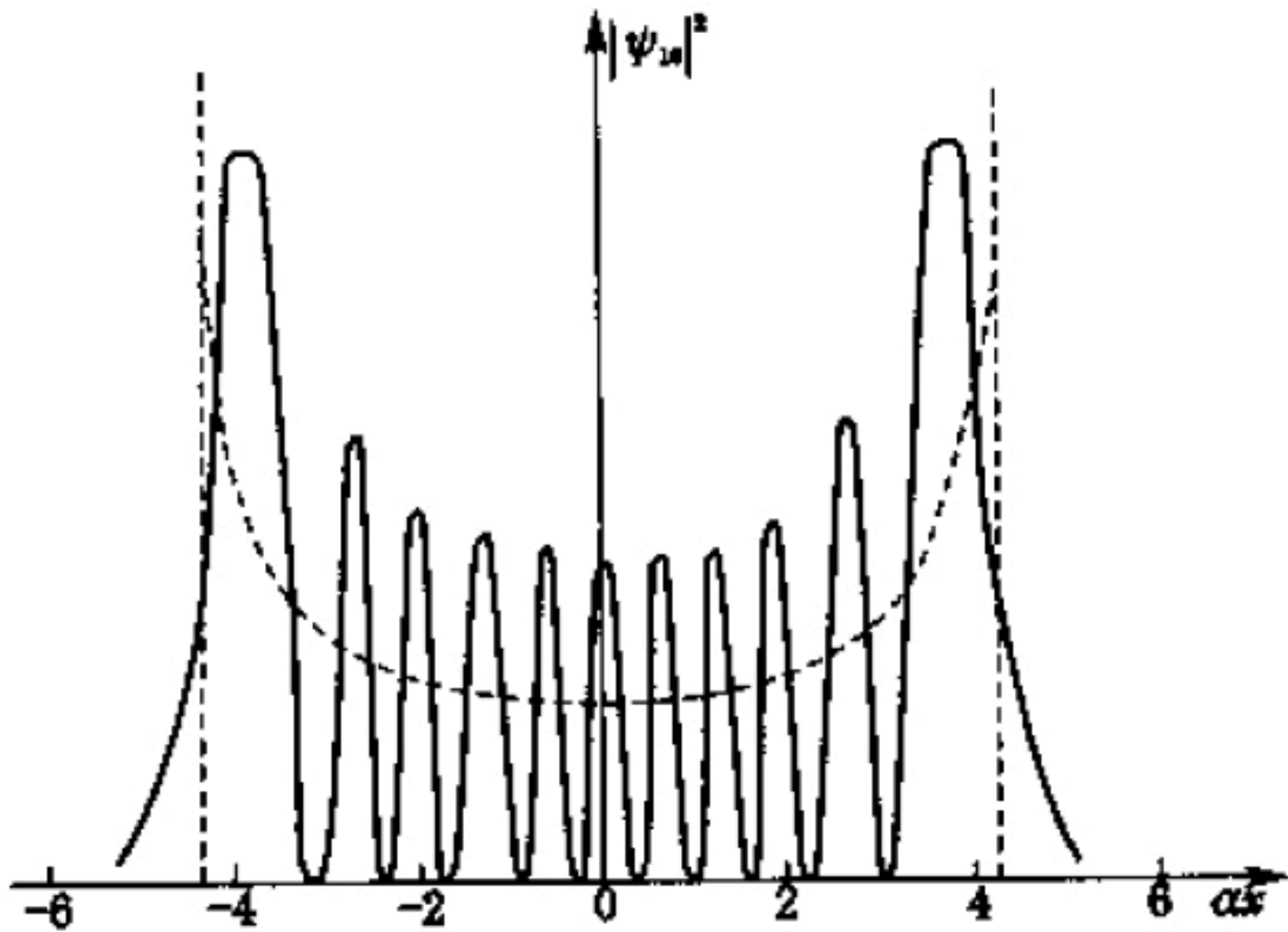
一般结果

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{2^n n!} \right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)$$

为什么最低的能量不是零？



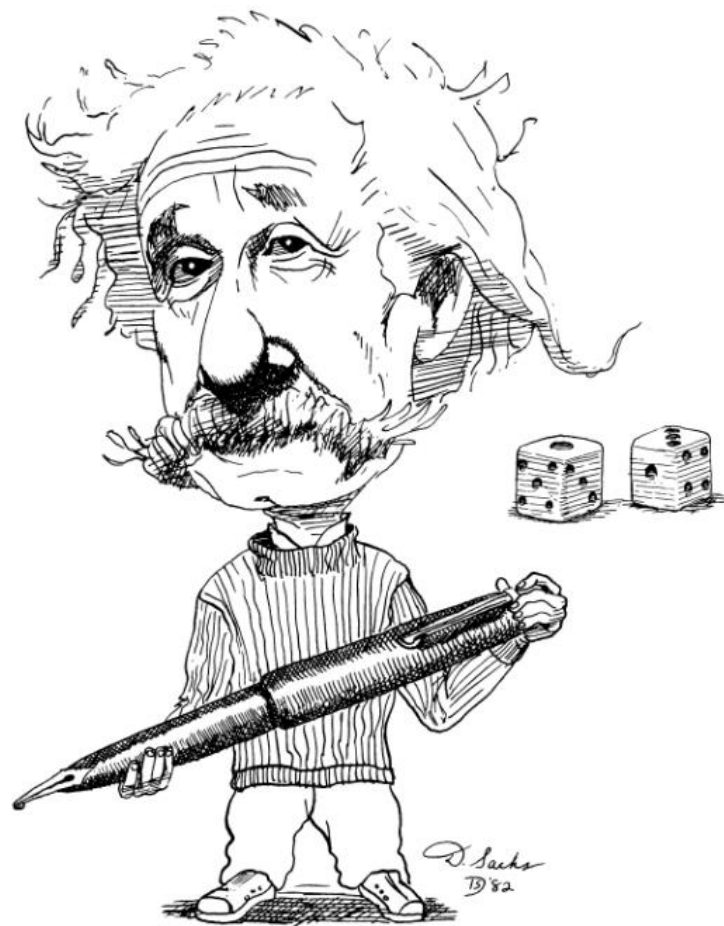


$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

爱因斯坦：上不掷骰子！

从量子力学的创立开始，
爱因斯坦就对量子力学
的解释表示强烈不满。

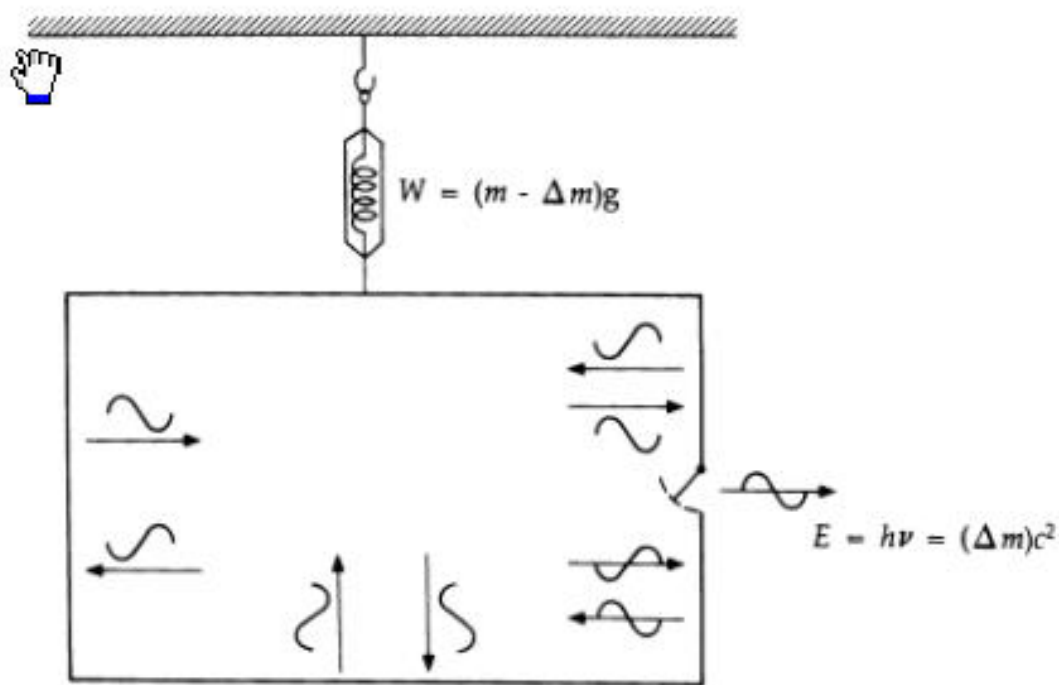
爱因斯坦认为量子力学
只是一个正确的理论的
过渡阶段，需要寻找基
本的理论。



爱因斯坦-玻尔为此争论多年

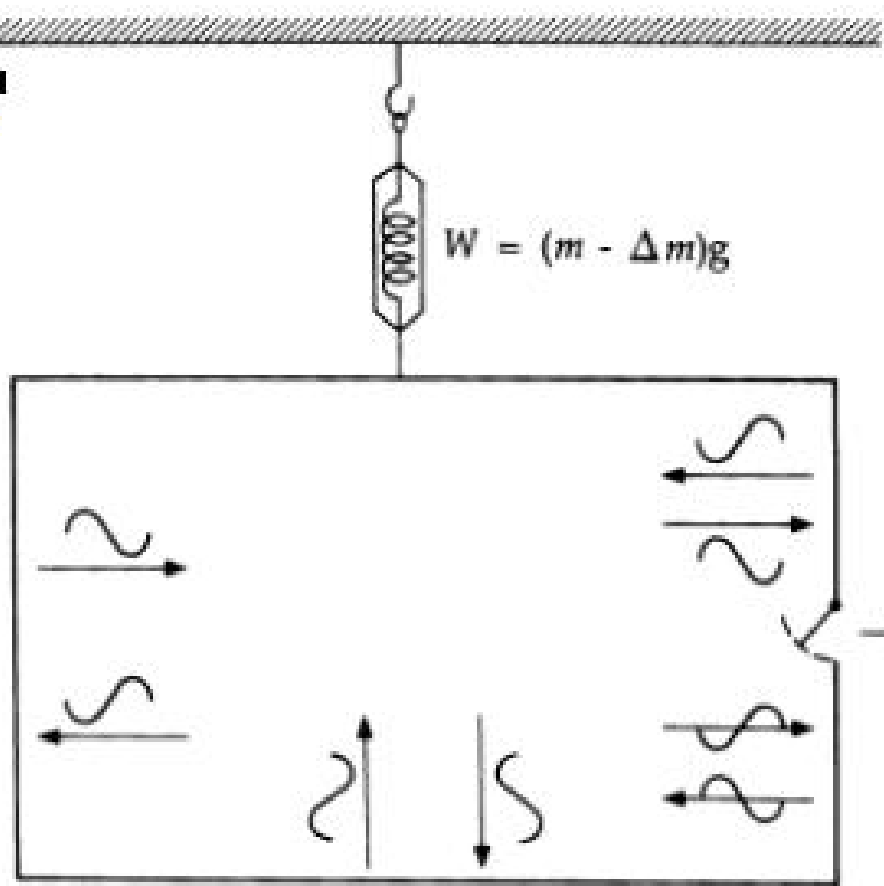


爱因斯坦设想了多个理想实验，试图证明量子力学的解释存在内在矛盾，但都被玻尔破解。这一过程加深了人们对于量子力学的理解。其中一个最为著名的是光子盒实验。



爱因斯坦试图否定能量时间不确定关系

$$\Delta E \Delta t \geq h$$

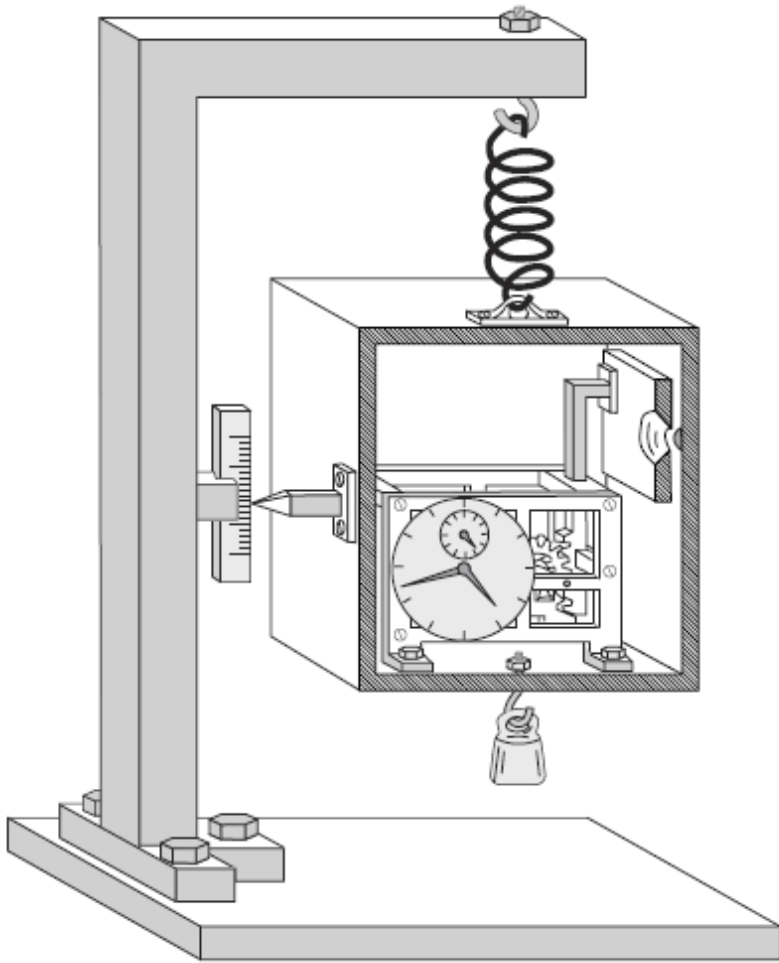


爱因斯坦：活门开启时间 Δt

与盒子的质量的测量 $\Delta E = \Delta mc^2$ 之间可以独立进行。

$E = h\nu = (\Delta m)c^2$

$\Delta E \propto \Delta t$



玻尔： 发射光子导致盒子上升，引力势能变小，在不同的势场中，根据广义相对论，时间不同。

计算表明，这个广义相对论效应恰好可以使得能量时间的不确定关系成立。

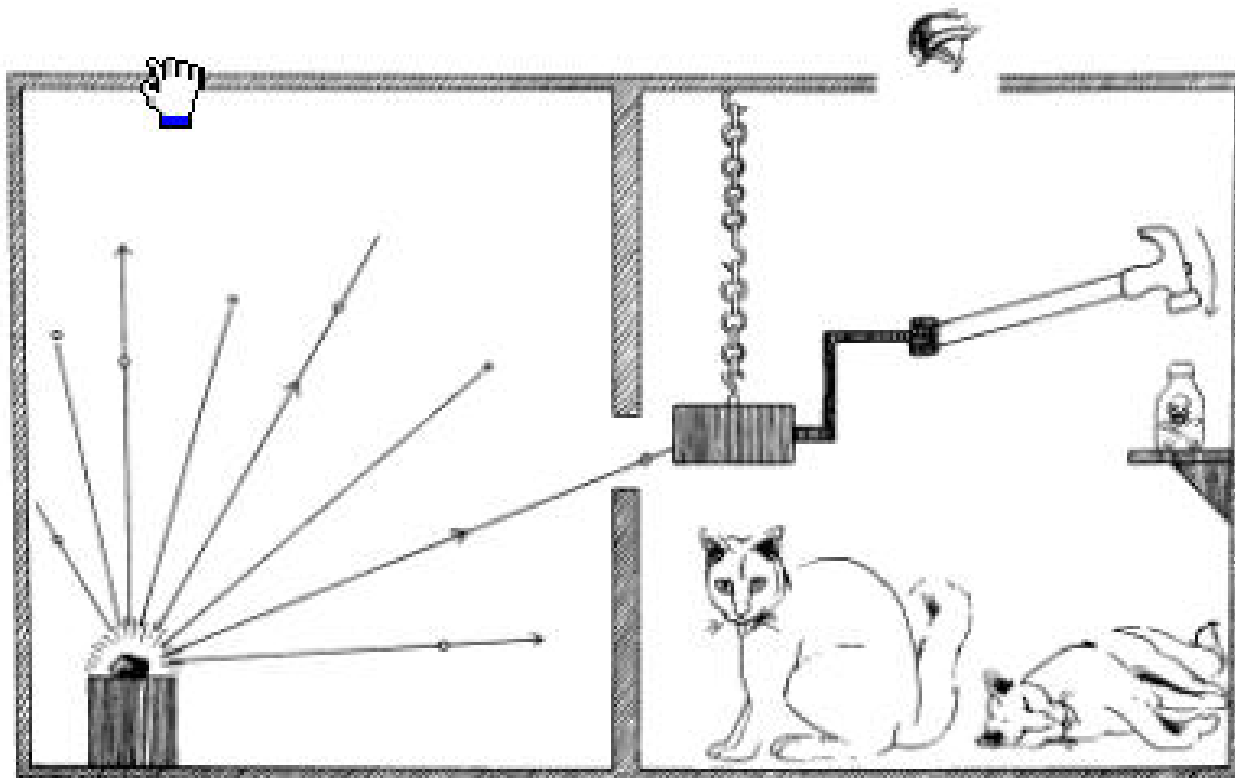
爱因斯坦： 量子力学没有内在矛盾， 但是,



量子力学的创始人之一薛定谔对于量子力学的哥本哈根解释也不能接受。

为了暴露量子力学的正统解释的问题，薛定谔设计了一个关于猫的理想实验。

薛定谔的猫



$$|\text{猫}\rangle = |\text{活猫}\rangle + |\text{死猫}\rangle$$

EPR 佯谬和Bell不等式

EPR(Einstein-Podolsky-Rosen) 的观点:

1, 定域因果性(local causality)观点: 如果两个事件之间的间隔是类空的, 则这两个事件之间不可能存在因果关系.

2, 物理实在要素观点. 任一可观测的物理量, 作为物理实在的一个要素, 它必定在客观上以确定的方式存在着.

A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Physical Review*, **47**, 777(1935)



再谈光

经过Maxwell的工作，光的经典理论在19世纪已经建立起来。

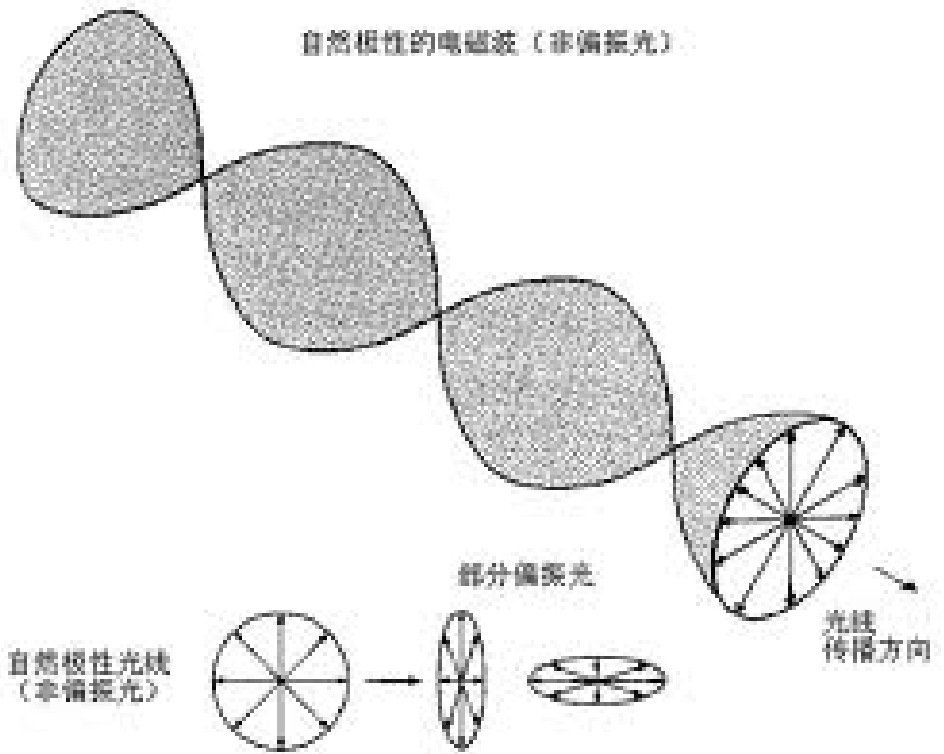
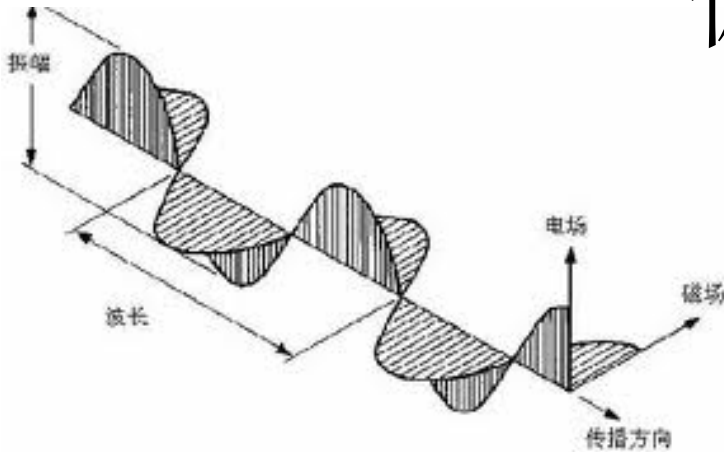
光是电磁波，可见光是波长处于 $500nm$ 附近的电磁波。

电磁波是电场和磁场相互激发传播的。

光具有两个独立的偏振方向，由电矢量的振动方向决定。

偏振光

电磁波传播图示



含有各种偏振分量的自然光

利用偏振片获得偏振光

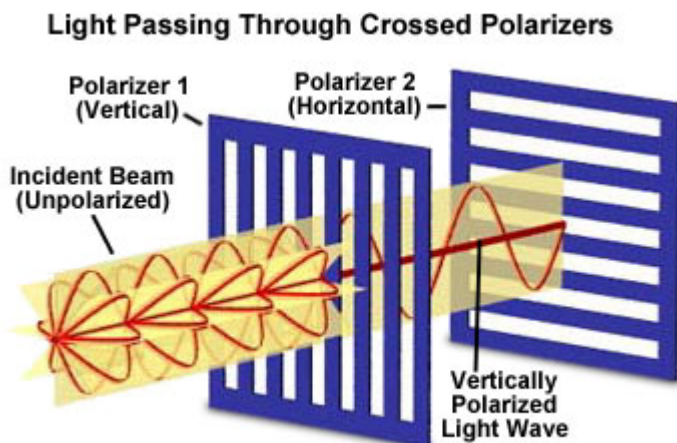
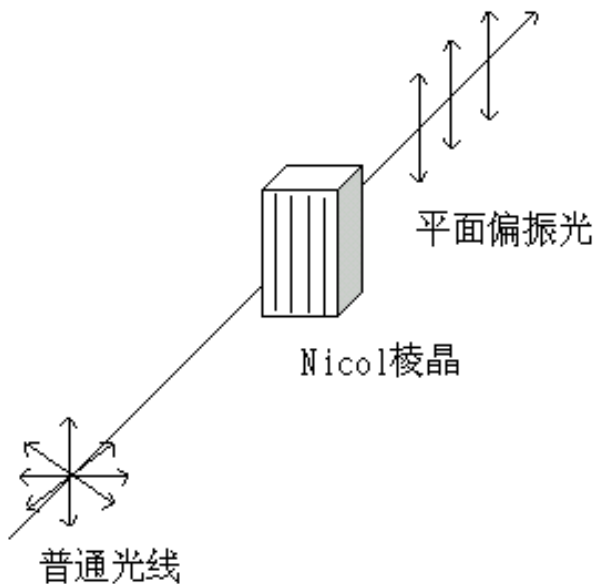
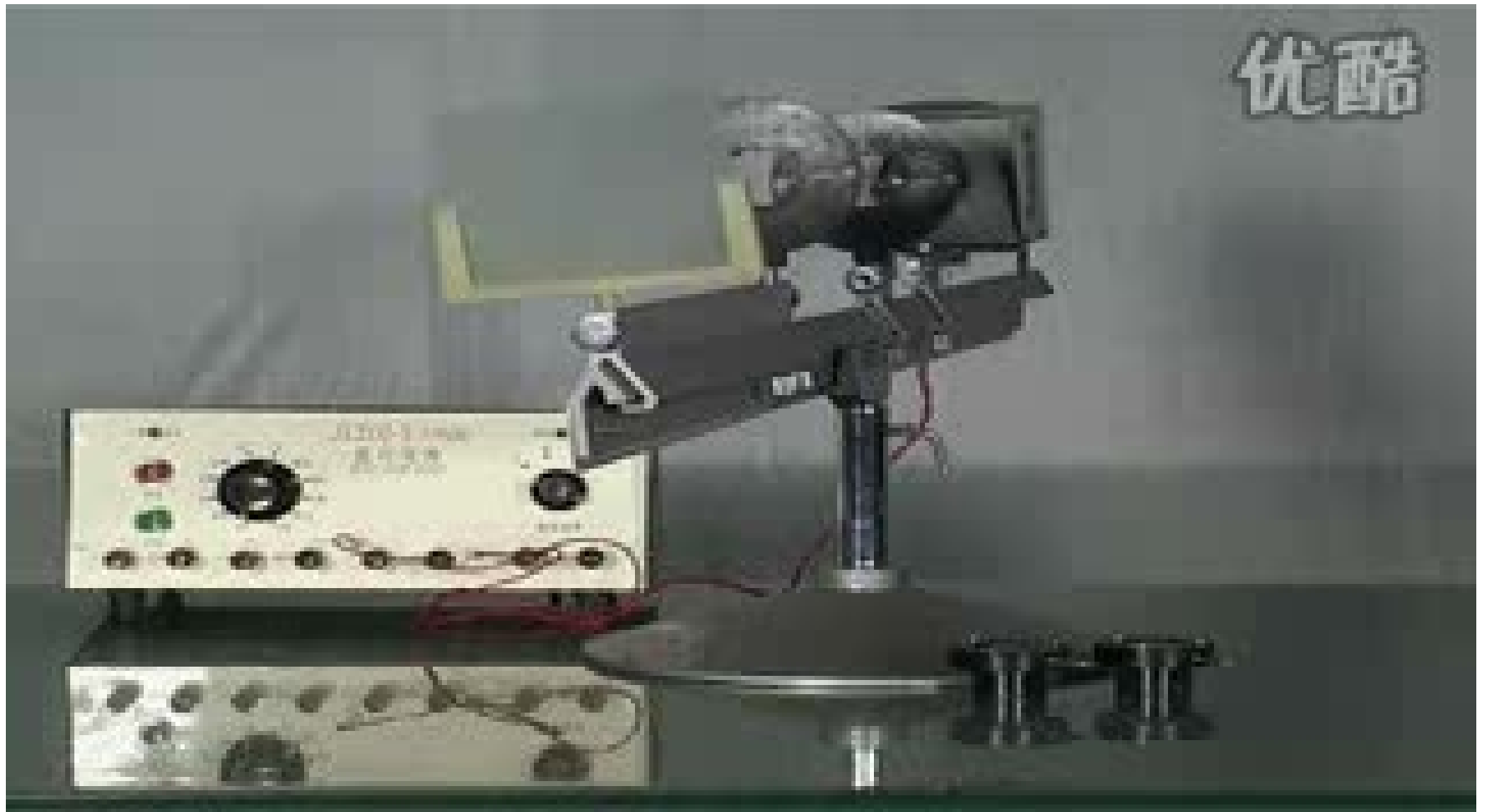


Figure 1

利用 V 代表竖直偏振光， H 代表水平偏振光。

如果在获得竖直偏振光以后，再用一偏振片，从竖直转到水平，结果如何？

优酷

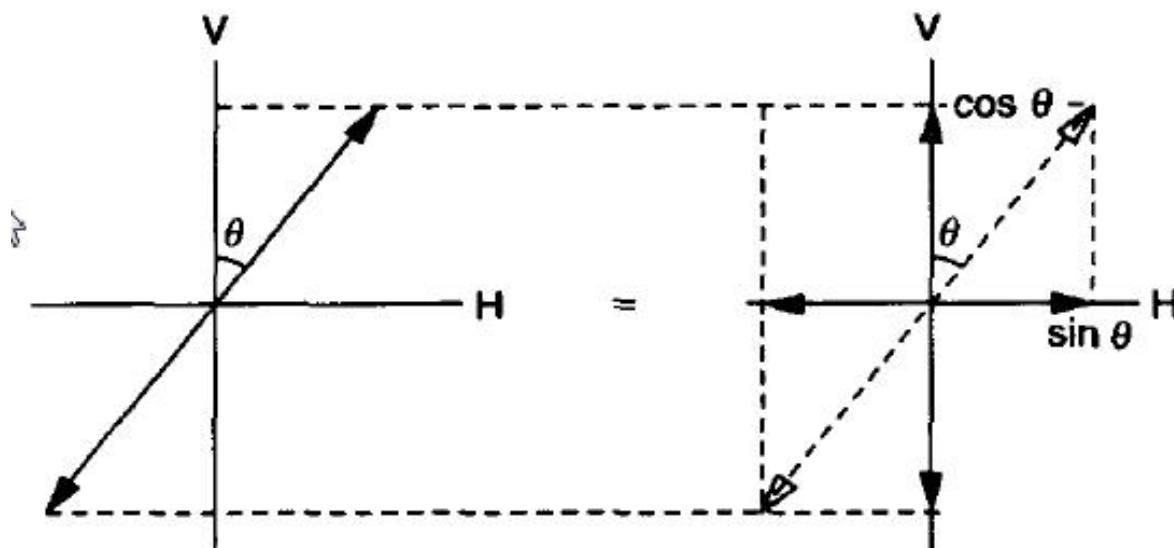


从平行到垂直，透过的光逐步减少到0！

如何理解？

任一方向的偏振光可以写成竖直方向和水平方向偏振光的叠加

$$\psi = \cos \theta V + \sin \theta H$$





沿 θ 方向偏振光，在竖直方向的强度为原强度的 $\cos^2 \theta$ ，在水平方向的强度为原强度的 $\sin^2 \theta$ 。

用一个竖直偏振片，光的强度下降到原来的 $\cos^2 \theta$ ，若通过一个水平偏振片，光的强度下降为原来的 $\sin^2 \theta$ 。

在光子的概念下，如何理解？

电场强度是光子的概率幅。

设想沿 45° 方向的偏振光，光子的概率幅是


$$\psi = \cos 45^\circ V + \sin 45^\circ H = \frac{1}{\sqrt{2}}V + \frac{1}{\sqrt{2}}H$$

用一个竖直偏振片测量，测得光子的概率为 $1/2$ ；

用一个水平偏振片测量，测得光子的概率为 $1/2$ ；

用一个 45° 偏振片测量，测得光子的概率为 1 ；

用一个 135° 偏振片测量，测得光子的概率为 0 ；



用一个竖直偏振片测量，测得光子的概率为 $1/2$ ；

再用一个竖直偏振片测量，测得光子的概率为 1 ；

再用水平偏振片测量，测得光子的概率为 0 ；

再用一个 45° 偏振片测量，测得光子的概率为 $1/2$ 。

再用一个 135° 偏振片测量，测得光子的概率为 $1/2$ ；

用一个水平偏振片测量，测得光子的概率为 $1/2$ ；

用一个 45° 偏振片测量，测得光子的概率为 1 ；

用一个 135° 偏振片测量，测得光子的概率为 0 ；



物理实在；

塌缩；

“月亮是不是只有我们看它的时候才存在？”

A. Einstein

EPR 佯谬和Bell不等式

EPR(Einstein-Podolsky-Rosen) 的观点:

1, 定域因果性(local causality)观点: 如果两个事件之间的间隔是类空的, 则这两个事件之间不可能存在因果关系.

2, 物理实在要素观点. 任一可观测的物理量, 作为物理实在的一个要素, 它必定在客观上以确定的方式存在着.

A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Physical Review*, **47**, 777(1935)



Bohm建议了一个明确的例子讨论EPR佯谬
对于两个粒子，若处于状态

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle)$$

如果两个粒子在空间上远离，在很短的时间内对二者做测量，是类空间隔的事件。

测量第一个粒子，自旋 $\pm\frac{1}{2}$ 的概率各为 $\frac{1}{2}$ ，测量后状态塌缩，第二个粒子的测量值完全确定。这和定域因果观点矛盾。

D. Bohm, Quantum Theory



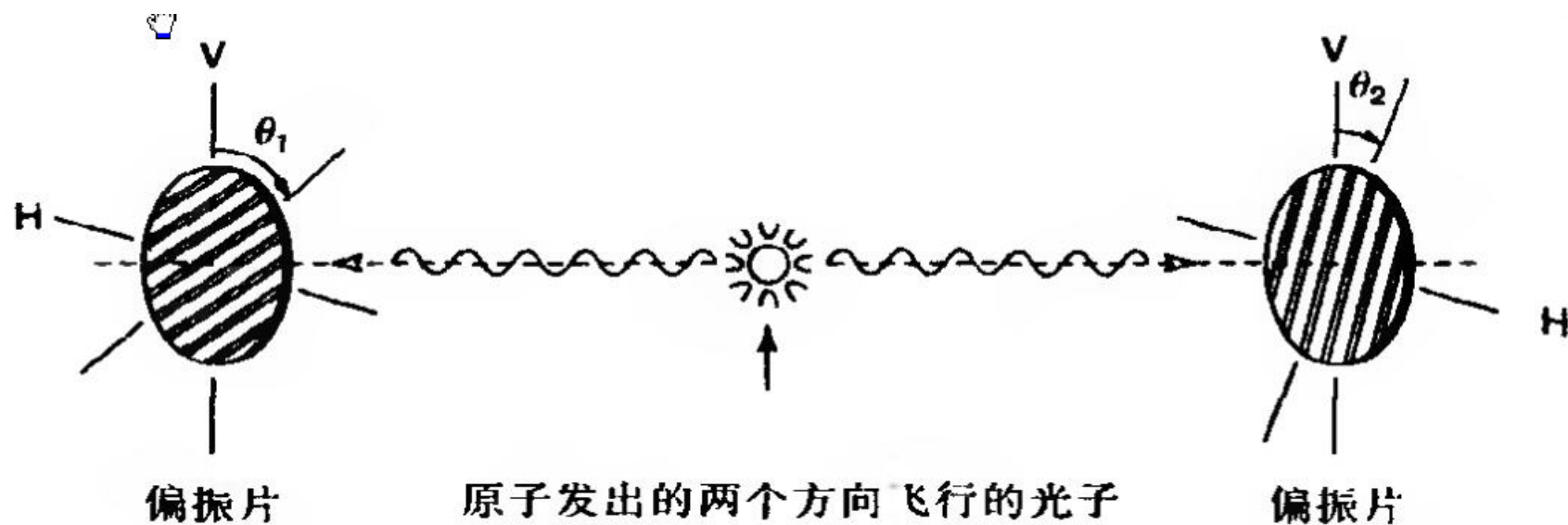
David Bohm

量子力学认为：系统的状态是非定域(non-local)的，如果两个粒子处于一个纠缠态，不论相距多远，即便是类空的间隔，事件也是关联的。

在测量之前，物理量本身是不确定的，测量使系统塌缩。

EPR佯谬：Bohm版本

考虑一个原子同时发出两个光子，两个光子沿相反方向发出，其偏振方向可以利用偏振片测出。测量时，两个光子可以相距非常远。





实验结果如下：

如果两个偏振片都在竖直(V)方向，可以同时测到两个光子；

如果两个偏振片都在水平(H)方向，可以同时测到两个光子；

如果一个偏振片在竖直(V)方向，一个偏振片在水平(H)方向，看不到光子同时通过；

最直接的解释

富翁的遗嘱：

一位上海的富翁临死前把自己的所有资产分给他的两个分别在广东和北京的儿子。

富翁把给予每个儿子的资产清单装入信封，委托律师在他死后寄出，在他的儿子收到信之前，没有人知道分配的方式，但一旦其中一个儿子打开信封，就同时知道另一个儿子的所得资产。

所有的结果都是事前定好的！

EPR认为：两个光子在发出的时候，其偏振方向就已经确定了，所以，测到 VV 和 HH ，测不到 VH 和 HV 就不奇怪了。

量子力学认为：左右两个光子处在一个纠缠态，其偏振方向是关联的。当测量其中之一时，光子的状态塌缩到这个偏振方向，从而也就确定了另一个光子的偏振方向。

爱因斯坦认为，量子力学的这个解释是不能接受的，因为它需要超距作用或无穷大的信息传递速度。

1964年, John Bell提出了一个解决EPR佯谬的方法。

贝尔发现:

如果爱因斯坦的看法是对的, 那么实验测量的结果会满足一个不等式。

如果量子力学是对的, 则这个不等式可以被违背。



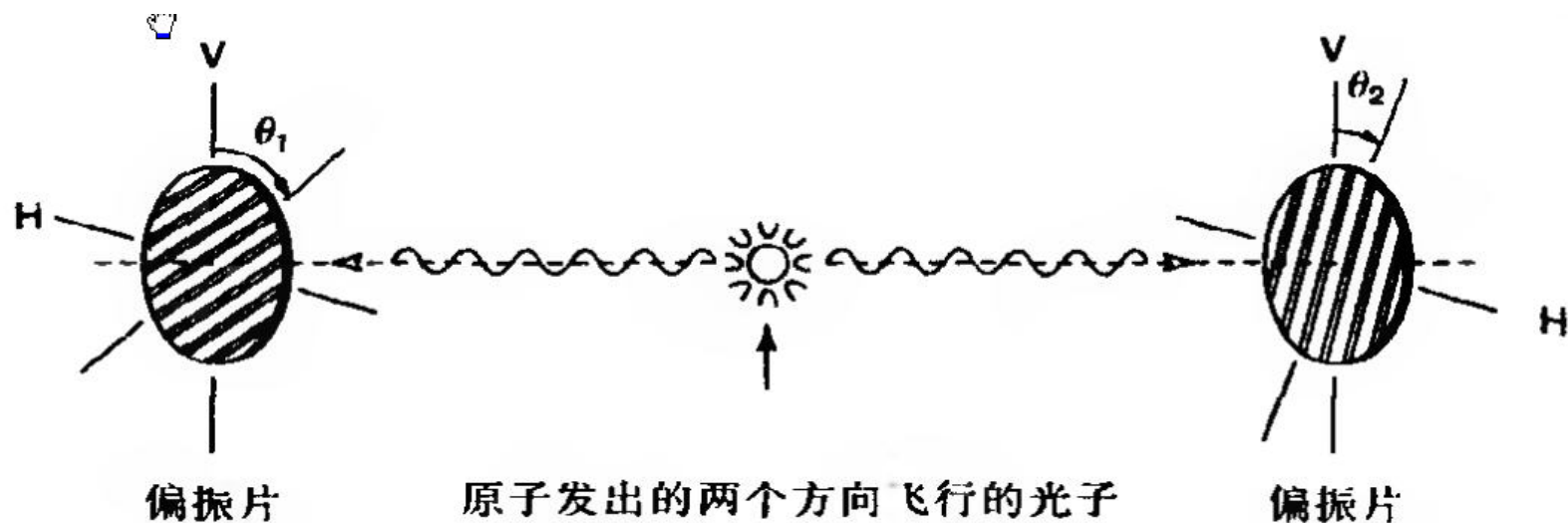
John Bell

任何局域隐变量理论都不可能重现量子力学的全部统计性预言

Bell 定理:

任何局域隐变量理论都不可能重现量子力学的全部统计性预言.

贝尔的证明基本上是数学的，这里给出一个非数学的证明。这个非数学的证明也是贝尔最早给出的。



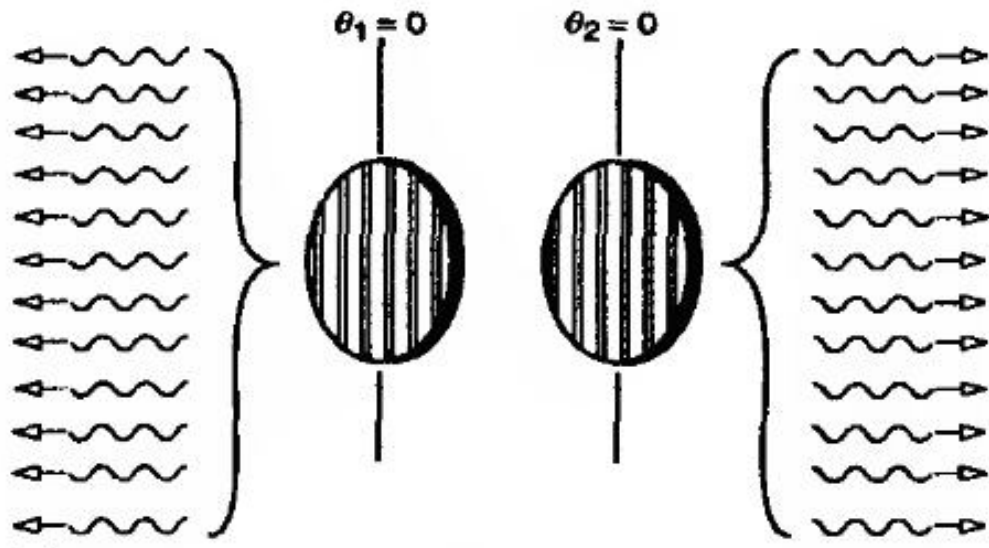
考虑当两个偏振片分别偏离竖直方向为 θ_1 和 θ_2 时，符合的光子数。用 $N(\theta_1, \theta_2)$ 表示两个偏振片记录不一致的光子数。

显然：
$$N(0, 0) = 0$$

我们想象有12对VV光子的实验，光子发出时，其偏振方向就确定为VV方向。

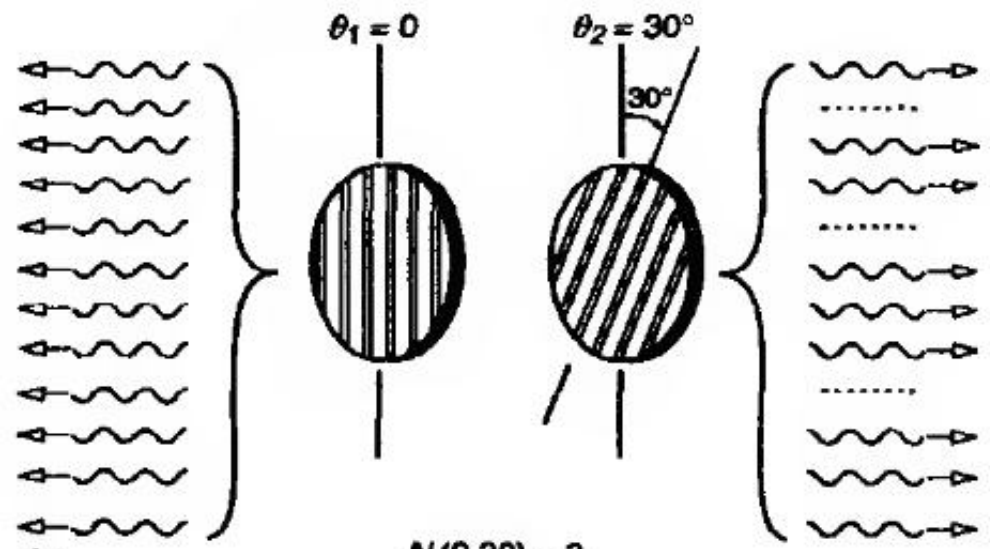
如果第二个偏振片转过 30° ，则V偏振不通过第二个偏振片的概率为 $\sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}$ ，于是

$$N(0, 30^\circ) = 3$$



(a)

$$N(0,0) = 0$$



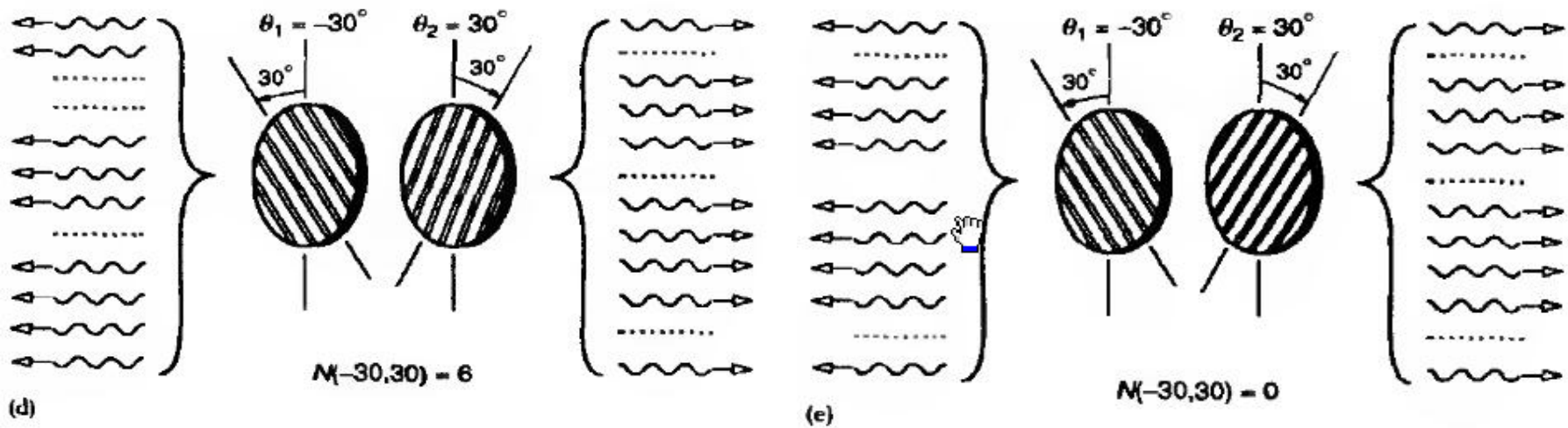
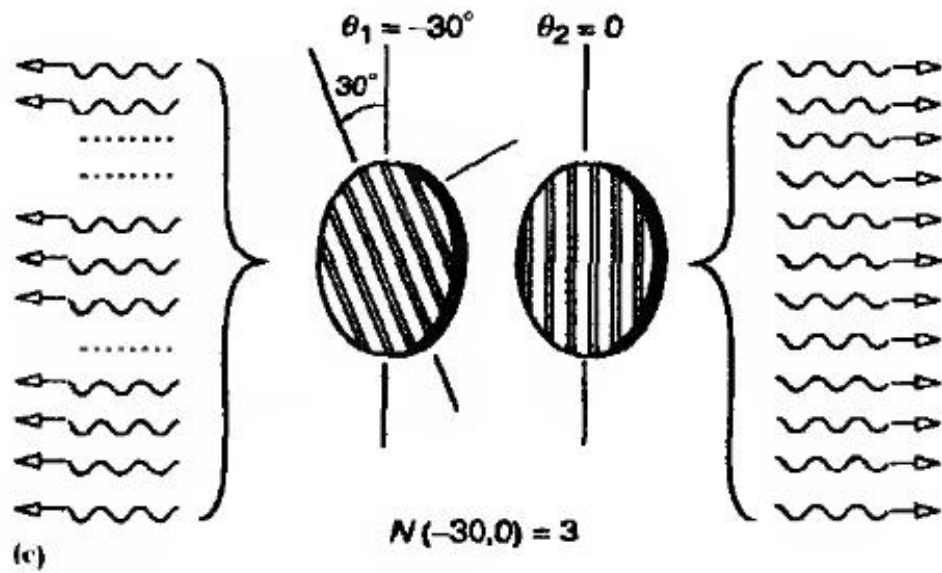
(b)

$$N(0,30) = 3$$

如果把第一个偏振片反向转过 30° , 则V偏振不通过第一个偏振片的概率为 $\sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}$, 于是, 平均有3个光子不会通过第一个偏振片。这3个可以与不通过第二个偏振片的3个完全一致, 也可以完全不一致, 或介于两个极端情况之间。也就是说

$$0 \leq N(-30^\circ, 30^\circ) \leq 6$$

$$N(-30^\circ, 30^\circ) \leq 6$$



根据量子力学，两个光子的偏振方向是相关联的，但取向并不确定，只是在测量的时候才坍缩到确定的偏振态。这样，

$$\begin{aligned} N(-30^\circ, 30^\circ) &= N(0, 60^\circ) \\ &= 12 \times \sin^2 60^\circ = 12 \times \frac{3}{4} = 9 \end{aligned}$$

$$\text{EPR:} \quad N(-30^\circ, 30^\circ) \leq 6$$

$$\text{量子力学:} \quad N(-30^\circ, 30^\circ) = 9$$



在1980年前后，阿斯派克特(A. Aspect)和他的巴黎课题组做了一系列的实验，实验结果违反贝尔不等式，和量子力学的预言一致。

对于状态：

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle)$$

沿空间三个方向 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 测量 $\vec{\sigma}$. 若第一个粒子沿 \vec{a} 方向测量的结果是 $A(\vec{a})$, 第二个粒子沿 \vec{b} 方向测量的结果是 $B(\vec{b})$, 两个测量的间隔类空. 多次测量, 求得平均值:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \langle A(\vec{a})B(\vec{b}) \rangle$$

同样可以得到：

$$P(\vec{b}, \vec{c}) = \langle B(\vec{b})C(\vec{c}) \rangle, \quad P(\vec{a}, \vec{c}) = \langle A(\vec{a})C(\vec{c}) \rangle$$

Bell 证明，如果EPR的观点成立，那末：

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c})$$

J. S. Bell, *Physics*, **1**, 195(1964).

由量子力学，可以求得

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \psi | (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) | \psi \rangle = -\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$

Bell 不等式成为


$$|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) - \cos(\widehat{\vec{a}\vec{c}})| \leq 1 - \cos(\widehat{\vec{b}\vec{c}})$$

如果 $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}} = \frac{2\pi}{3}$

$$1 \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{Bell 不等式被破坏}$$

1980年代以来的大量精密的实验确定无疑的证明了Bell不等式可以被破坏!

量子力学是正确的!



由EPR, Bohm等为了否定量子力学而建议, 后来被Bell等发展, 在近30年来仔细而又广泛研究的量子纠缠态的概念和性质, 成为量子信息的物理基础.

基于量子信息理论的量子保密通信已经在实验室里实现!

利用纠缠态可以设计各种量子门, 如量子或(QOR), 量子非(QNOT), 量子与(QAND)等, 这些构成了量子计算的基础.

讨论题：

1，显像管中的电子都有确定的能量和确定的运动轨道，而且可以利用经典电磁学计算。这是否与量子力学矛盾？在这个问题中电子完全被处理为经典粒子。

显像管的设计师是否必须懂得量子力学？

2，根据量子测量的假定，在没有做出测量之前，系统由一个波函数描述，测量时才坍缩到确定的本征态。那么，在我们看一个宏观物体（例如）之前，这个宏观物体是否在你看到的那个地方？

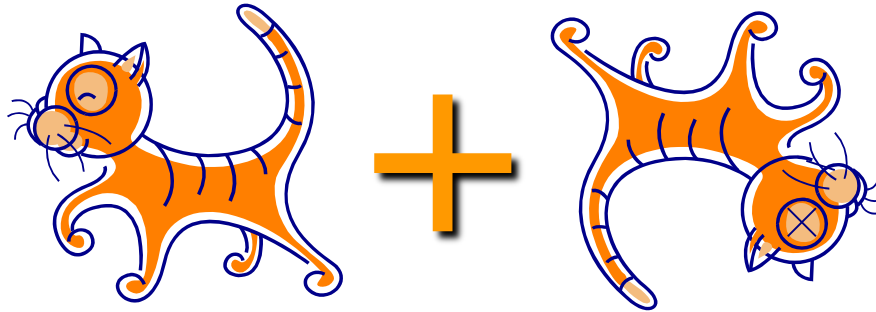
3，量子力学的极限 =?= 牛顿力学



4. 薛定谔猫和富翁的遗嘱，是一回事吗？

$$\alpha|\text{活猫}\rangle + \beta|\text{死猫}\rangle$$

Entanglement killed the cat



According to quantum theory, if a cat can be in a state $|\text{ALIVE}\rangle$ and a state $|\text{DEAD}\rangle$, it can also be in a state $|\text{ALIVE}\rangle + |\text{DEAD}\rangle$.

Why don't we see cats in such superposition states?

Entanglement killed the cat

ANSWER: because the theory actually predicts.....

