2.3 二点边值问题的本征值

对于方程

$$y'' + \frac{1}{x}y' + ky = 0$$

在边界条件 $y(0)$ 有限, $y(1) = 0$ 下计算本征值 k.
提示, 为了得到 k 的叠代初值, 考虑 k 很大时, 方程成为 $y'' + ky = 0$, 其解为 $y \sim \cos(\sqrt{k}x + \delta)$, 若令 $\delta = 0$ (δ 应在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内), 则 $k = (n + \frac{1}{2})^2\pi^2$.

2.4 样条函数 (选作)

练习

分别对于端点和内点计算

$$\begin{aligned} S_i(x) \quad = \quad & \frac{1}{6}\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i}y''_i + \frac{1}{6}\frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i}y''_{i+1} \\ & + (y_{i+1} - \frac{1}{6}y''_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^2)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \\ & + (y_i - \frac{1}{6}y''_i(x_{i+1}-x_i)^2)\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \end{aligned} \tag{2.1}$$

的积分, 并最终给出样条插值方法计算列表函数的算法和程序

练习

对于函数

$$f(x) = \frac{x\cos x}{1+x^3}$$

(i), 用辛普生方法计算 $\int_{1.5}^{2} f(x)dx$
(ii), 在区间 $[1, 2]$ 上分 *50* 个子区间, 计算 $f(x_i)$ 的值, 利用这些数值并用样条函数方法 *(*见上题*)* 计算上述程分, 比较所得结果

2.5 Padé 近似及应用 (选作。但建议做一下)

1, 编写利用 ε 表计算 *padé* 逼近的程序, 利用 $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$, 用 *padé* 逼近方法计算 $\ln(5)$ 的值并与准确值比较
2, 考虑 π 的一个著名的慢收敛级数,

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{2k+1}$$

用 *Padé* 近似计算 π 的数值.

3, 考虑积分

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

试证明此积分可写为下面的形式级数

$$I(x) = 1 - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + 4!x^4 - 5!x^5 + \cdots$$

从这一发散级数出发, 利用 *Padé* 近似计算 $I(1)$, *(*$I(1)$ 的准确值可用数值积分方法求出为 $0.596347\cdots$*)*

4, 对于 $x = 0.5$, 利用 e^x 的幂级数展开式, 从小到大改变所取级数的项数 N 并用前面的程序计算其 *Padé* 逼近, 观察所得结果并与准确值比较. 当 N 较大时会发生什么情况?